VI Singularités en théorie des coques minces

- Rappels sur le modèle de coque de Koiter
- Etude théorique des singularités
- Simulations numériques avec des techniques de maillages adaptatifs
- Exemple de coques paraboliques inhibées
- Coques elliptiques bien-inhibées et sensitives

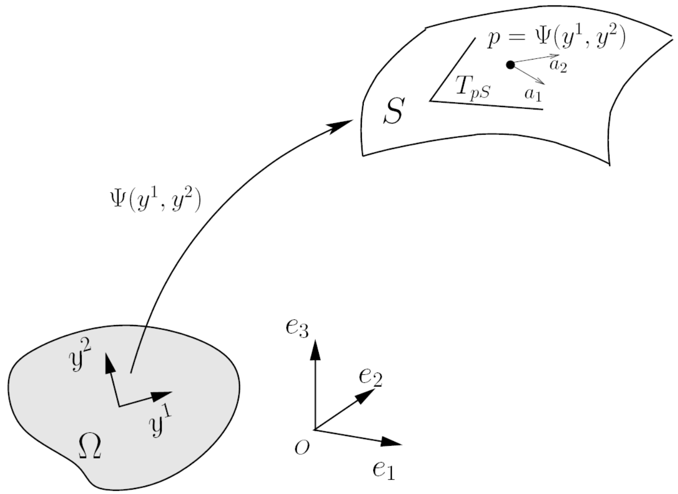
Introduction

- Théorie des coques : apparition de couches limites lorsque l'épaisseur relative ε tend vers 0.
  - contenant des déplacements de plus en plus amples et tendant à être singuliers (singularités dans la direction perpendiculaire à la couche)
  - de plus en plus fines

→ besoin d'un maillage fin dans ces zones, mais uniquement dans la direction perpendiculaire à la couche :

- maillage adaptatif
- maillage anisotrope

Théorie des surfaces



$$\left(y^1, y^2\right) \in \Omega \xrightarrow{\psi} \vec{\psi}\left(y^1, y^2\right) = \left(\psi^1\left(y^1, y^2\right), \psi^2\left(y^1, y^2\right), \psi^3\left(y^1, y^2\right)\right) \in S$$

- Vecteurs de la base covariante en (y^1,y^2)

$$\vec{a}_\alpha = \vec{\psi}_{,\alpha} \qquad \vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2}{\left\|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2\right\|}$$

- Tenseur métrique :

$$a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta$$

- Tenseur de courbure :

$$b^\alpha_\beta = -a^\alpha \cdot N_{,\beta} = N \cdot a^\alpha_{,\beta}$$

- Base contravariante : (a^α, a^β, a_3) telle que

$$a^\beta . a_\alpha = \delta_\alpha^\beta \qquad a_\alpha = a_{\alpha\beta} a^\beta$$

- Dérivée d'un vecteur tangent :

$$a_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} a_\gamma + b_{\alpha\beta} a_3$$

- Dérivée covariante d'un vecteur :

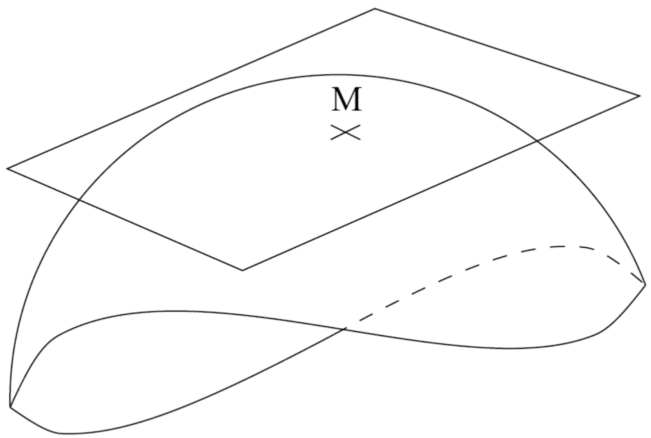
$$D_k v_i = \partial_k v_i + \Gamma_{ki}^{j} v_j$$

- Dérivée covariante d'un tenseur :

$$D_k T^{ij} = \partial_k T^{ij} + \Gamma_{kn}^{j} T^{in} + \Gamma_{km}^{j} T^{mj}$$

Classification des surfaces

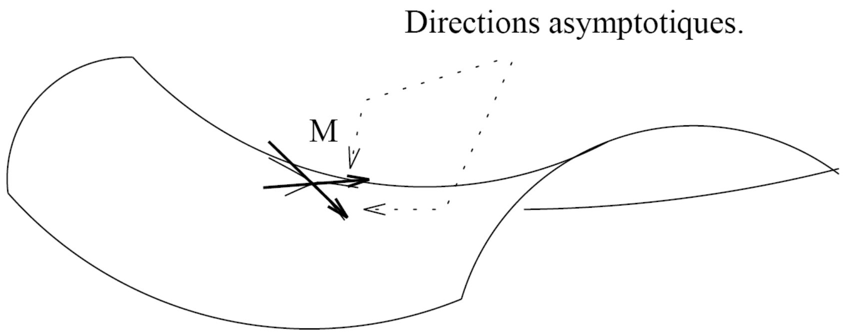
- Surface elliptique



- tous les points sont elliptiques
- les courbures principales sont de même signe
- pas de directions asymptotiques

Classification des surfaces

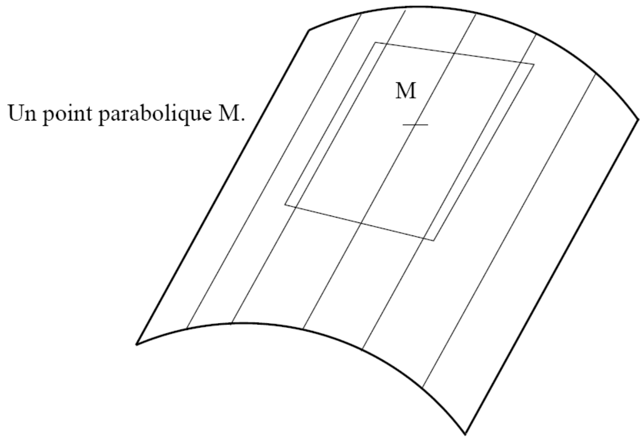
- Surface hyperbolique



- tous les points sont hyperboliques
- courbures principales de de signe opposé
- 2 directions asymptotiques distinctes

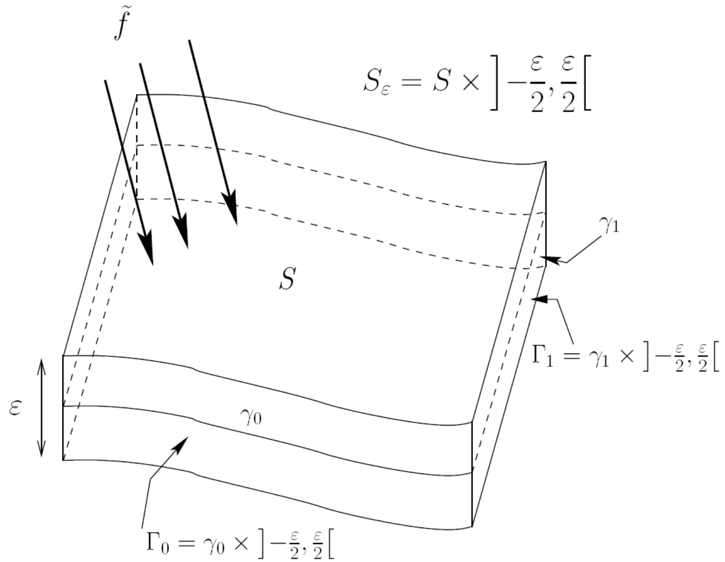
Classification des surfaces

- Surface parabolique



- tous les points sont paraboliques
- une des courbures principales est nulle
- une direction asymptotique (double)

Le problème mécanique



- $\tilde{f}$ forces surfaciques
- ε épaisseur relative
- S surface moyenne

- **Formulation variationnelle du modèle de coque de Koiter pour une coque d'épaisseur ε :**

$$a_m(u,v) + \varepsilon^2 a_f(u,v) = b(v)$$

avec

$$a_m(u,v) = \int_S A^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}(u)\gamma_{\alpha\beta}(v)dS$$ énergie de membrane

$$a_f(u,v) = \frac{1}{12}\int_S A^{\alpha\beta\lambda\mu}\rho_{\lambda\mu}(u)\rho_{\alpha\beta}(v)dS$$ énergie de flexion

Déplacements inextensionnels

- Espace des déplacements inextensionnels G :

$$G = \{v \in V;\ a_m(v,v) = 0\} = \{v \in V;\ \gamma_{\alpha\beta}(v) = 0\}$$

$$\Downarrow$$

Caractérise la rigidité de la coque

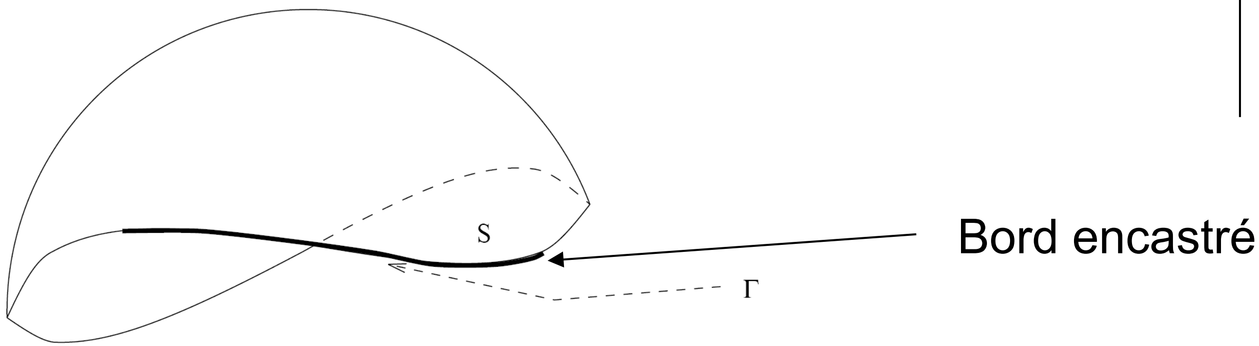
- G dépend de la nature de la surface moyenne (elliptique, parabolique ou hyperbolique) et des C.L

Si G={0} la coque est inhibée

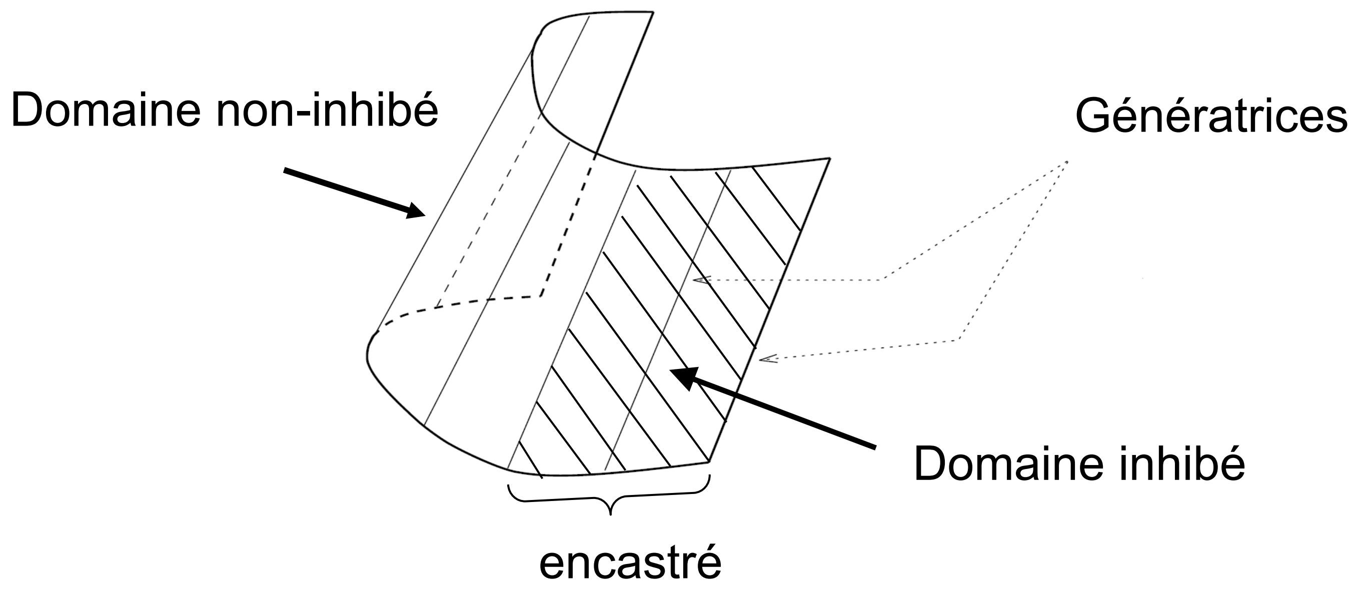
Si G ≠ {0} la coque est non inhibée

Coques elliptiques inhibées

S est inhibée



Coques paraboliques inhibées



Le problème limite

Modèle de Koiter

$$(u_1, u_2, u_3) \in H^1 \times H^1 \times H^2$$

$$\varepsilon \searrow 0$$

Modèle de membrane si G={0}

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^0 \in V_m \quad \text{tel que} \\ a_m(u^0, v) = b(v) \ \forall v \in V_m \end{cases}$$

$$u_3 \in L^2(\omega)$$

Perte de régularité de u_3 et apparition de couches limites

Modèle de flexion pure si G ≠ {0}

Non étudié

Les différentes couches

- Couches limites sur le bord de S
- Couches internes lorsque le chargement est singulier :
  - le long des courbes où le chargement est singulier
  - le long des courbes caractéristiques (=courbes asymptotiques de S) tangentes à une courbe où le chargement est singulier
- Dans ces couches, les déplacements sont singuliers
- Propagation le long des caractéristiques

Epaisseur des couches limites

Properties	**Non Characteristic**	**Characteristic**	
		hyperbolic	*parabolic*
layer thickness	$\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$	$\mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$	$\mathcal{O}(\varepsilon^{1/4})$

Etude des singularités des déplacements

- Réduction du système de membrane à un système d'EDP pour u_3
- Basé sur l'analyse micro-locale des singularités :
  - Les coefficients géométriques sont fixés au point étudié
  - Seules les dérivées d'ordre supérieur sont considérées
- Le système de membrane s'écrit $A\vec{u} = \vec{f}$

avec
$$A = \begin{pmatrix} -A^{1\beta\gamma 1}\partial_\beta\partial_\gamma & -A^{1\beta\gamma 2}\partial_\beta\partial_\gamma & A^{1\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta \\ -A^{2\beta\gamma 1}\partial_\beta\partial_\gamma & -A^{2\beta\gamma 2}\partial_\beta\partial_\gamma & A^{2\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta \\ -A^{1\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta & -A^{2\beta\gamma\delta}b_{\gamma\delta}\partial_\beta & A^{\alpha\beta\gamma\delta}b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta} \end{pmatrix}$$

Etude des singularités des déplacements

- Généralisation de la règle de Cramer pour les systèmes algébriques :

$$Det(A)u_3 = A^C_{13}f^1 + A^C_{23}f^2 + A^C_{33}f^3$$

- Pour un effort normal $(f^1 = f^2 = 0)$ on obtient :

$$E\left[b_{22}\partial_1^2 + b_{11}\partial_2^2 - 2b_{12}\partial_1\partial_2\right]^{(2)} u_3 = a^2\left[a^{11}\partial_1^2 + a^{22}\partial_2^2 + 2a^{12}\partial_1\partial_2\right]^{(2)} f^3$$

Composantes covariantes du tenseur de courbure

$a=det(a_{\alpha\beta})$

- Expression similaire obtenue pour u_1 et u_2

Ordres des singularités : principaux résultats

- Si la singularité du chargement est le long d'une ligne non caractéristique :
  - u_3 a la même singularité que f^3
  - il n'y a pas de propagation

- Si la singularité du chargement est le long d'une ligne caractéristique :
  - u_3 est de 4 ordre plus singulier que f^3 si le point est parabolique
  - u_3 est de 2 ordre plus singulier que f^3 si le point est hyperbolique
  - il y a propagation de la singularité

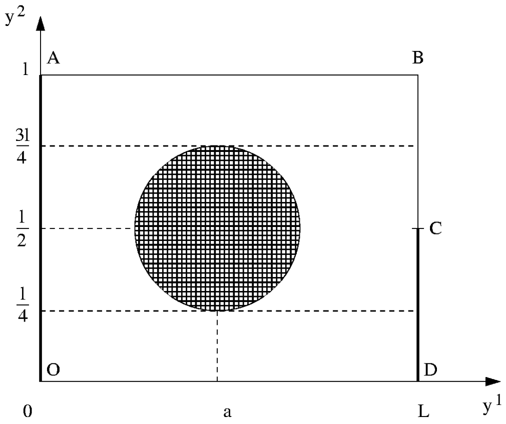
- Des résultats similaires sont obtenus pour u_1 et u_2 (avec des ordres différents)

Ordres des singularités

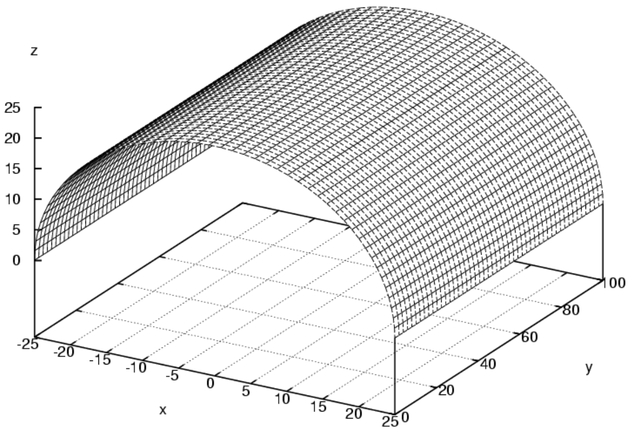
Properties	Non Characteristic	Characteristic	
		hyperbolic	*parabolic*
singularity order of u_3	+0	+2	+4
singularity of the tangential displacements	-1 (or less)	+1 (or less)	+3 (or less)
propagation	no	yes	yes

Etude des singularités pour une coque parabolique

- Exemple du demi-cylindre



$$\vec{\psi}\left(y^1, y^2\right) = \left(R\cos\frac{y^2}{R}, y^1, R\sin\frac{y^2}{R}\right)$$



Données :

- L=100 mm, l =25π mm, R=25 mm
- E=210 000 Mpa, *ν=0.3*
- *f^3=10 ε MPa*

Exemple du demi-cylindre

Propriétés géométriques

- Base locale : $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad a_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{y^2}{R}) \\ 0 \\ \cos(\frac{y^2}{R}) \end{pmatrix}$ $\quad a_3 = \begin{pmatrix} -\cos(\frac{y^2}{R}) \\ 0 \\ -\sin(\frac{y^2}{R}) \end{pmatrix}$

- Tenseur métrique : $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Tenseur de courbure : $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ caractéristiques : y^2=constante

- Symboles de Christoffel : $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = 0$

d' où
$$D_\alpha u_\beta = \partial_\alpha u_\beta$$
$$D_\lambda T^{\alpha\beta} = \partial_\lambda T^{\alpha\beta}$$

- Loi de comportement : $T^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}$

avec $$A^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\right)$$

Soit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} T^{11} \\ T^{22} \\ T^{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu}\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

Exemple du demi-cylindre

- Système membranaire :

$$\begin{cases} -\partial_1 T^{11} - \partial_2 T^{12} = f_1 \\ -\partial_2 T^{22} - \partial_1 T^{12} = f_2 \qquad \qquad dans \quad \omega \\ \qquad\qquad -b_{22} T^{22} = f_3 \end{cases}$$

- Loi de comportement : $T^{\alpha\beta} = A_{11}^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}$

- Déformations membranaires

$$\begin{cases} \gamma_{11} = \partial_1 u_1 \\ \gamma_{22} = \partial_2 u_2 - b_{22} u_3 \\ \gamma_{12} = \frac{1}{2}(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) \end{cases}$$

Chargement appliqué

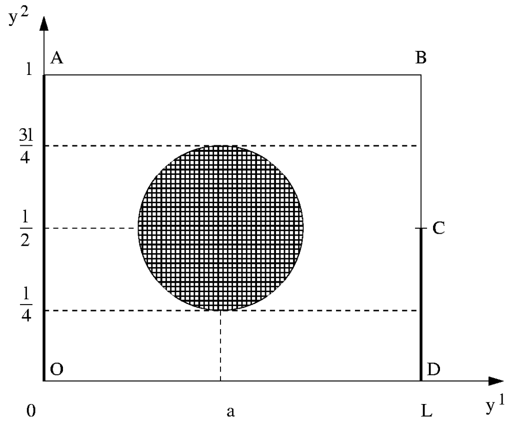
- Effort normal appliqué : $f = f^3 e_3$

avec $f^3 = \begin{cases} -1 & \text{si } \left(y^2 - \frac{l}{2}\right)^2 + \left(y^2 - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{16} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

→ Le chargement est discontinu (singulier)

- Conditions aux limites:
  - Encastrement sur OA et CD
  - Libre ailleurs

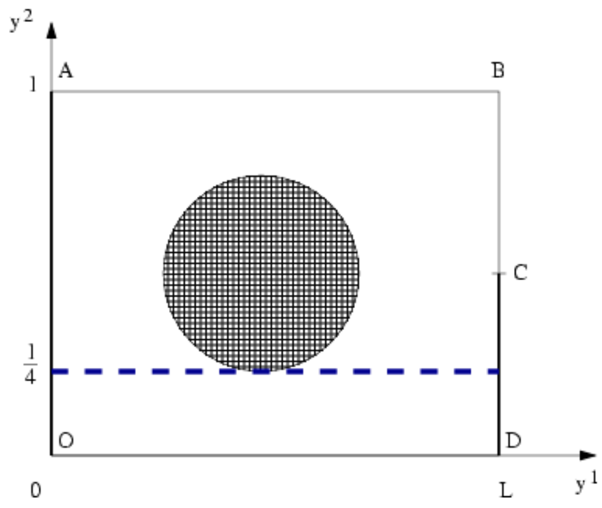
→ La coque est inhibée



Suivant la théorie :

- les déplacements sont singuliers
- il y a propagations des singularités le long des lignes caractéristiques

Chargement



- Expression de f^3 au voisinage de $y^2=0{,}25l$

$$f^3 \approx 2\sqrt{\frac{l}{2}\left(y^2-\frac{l}{4}\right)}\ H\left(y^2-\frac{l}{4}\right)\ \delta\left(y^1-a\right)=K\ \ \Phi\left(y^2\right)\Psi\left(y^1\right)$$

avec

$$\begin{cases} K=\sqrt{2l} \\ \Phi\left(y^2\right)=\left(y^2-\frac{l}{4}\right)^{1/2} H\left(y^2-\frac{l}{4}\right) \\ \Psi\left(y^1\right)=\delta\left(y^1-a\right) \end{cases}$$

Etude des déplacements sur la ligne y^2=0.25l

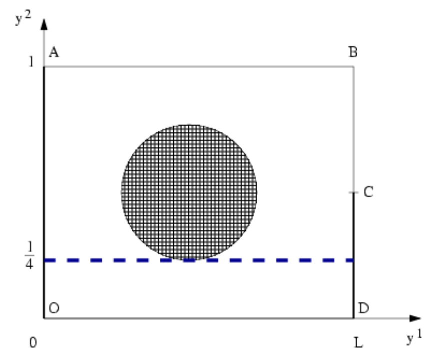
$$\begin{cases} -\partial_1 T^{11} - \partial_2 T^{12} = 0 \\ -\partial_2 T^{22} - \partial_1 T^{12} = 0 \\ -b_{22} T^{22} = f^3 \end{cases} \rightarrow$$

$$T^{22} = \tau^{22}(y^1)\Phi(y^2)$$

avec

$$avec\ \Phi(y^2) = \left(y^2 - \frac{l}{4}\right)^{1/2} H\left(y^2 - \frac{l}{4}\right)$$

$$\tau^{22}(y^1) = -\frac{1}{b_{22}}\delta(y^1 - a)$$



Etude des déplacements sur la ligne y²=0.25l

$$\begin{cases} -\partial_1 T^{11} - \partial_2 T^{12} = 0 \\ -\partial_2 T^{22} - \partial_1 T^{12} = 0 \rightarrow \\ -b_{22} T^{22} = f^3 \quad \rightarrow \end{cases}$$

$$T^{12} = \tau^{12}(y^1)\Phi^{(1)}(y^2) + \dots$$

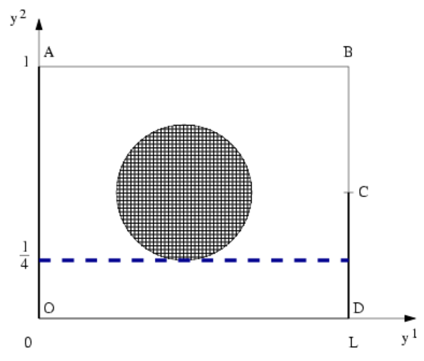
$$T^{22} = \tau^{22}(y^1)\Phi(y^2)$$

avec

$$avec\ \Phi(y^2) = \left(y^2 - \frac{l}{4}\right)^{1/2} H\left(y^2 - \frac{l}{4}\right)$$

$$\tau^{22}(y^1) = -\frac{1}{b_{22}}\delta\left(y^1 - a\right)$$

$$\partial_1 \tau^{12}(y^1) = -\tau^{22}(y^1)$$



Etude des déplacements sur la ligne $y^2=0.25l$

$$\begin{cases} -\partial_1 T^{11} - \partial_2 T^{12} = 0 \\ -\partial_2 T^{22} - \partial_1 T^{12} = 0 \\ -b_{22} T^{22} = f^3 \end{cases}$$

$$T^{11} = \tau^{11}\left(y^1\right)\Phi^{(2)}\left(y^2\right) + \ldots$$

$$T^{12} = \tau^{12}\left(y^1\right)\Phi^{(1)}\left(y^2\right) + \ldots$$

$$T^{22} = \tau^{22}\left(y^1\right)\Phi\left(y^2\right)$$

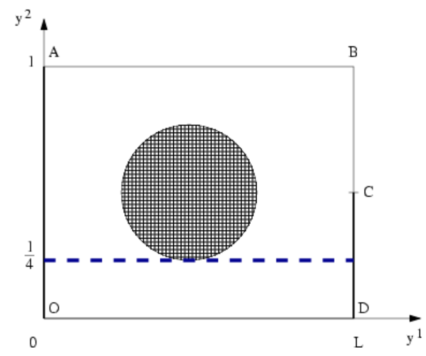
avec

$$\tau^{22}(y^1) = -\frac{1}{b_{22}}\delta\left(y^1 - a\right)$$

$$\partial_1 \tau^{12}\left(y^1\right) = -\tau^{22}\left(y^1\right)$$

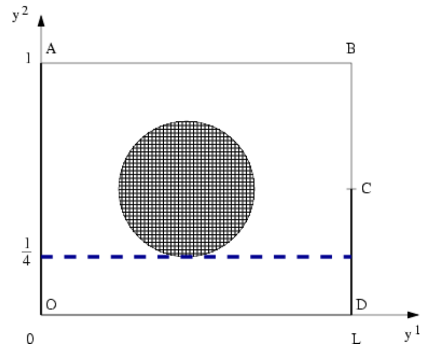
$$\partial_1 \tau^{11}\left(y^1\right) = -\tau^{12}\left(y^1\right)$$

$$avec\ \Phi\left(y^2\right) = \left(y^2 - \frac{l}{4}\right)^{1/2} H\left(y^2 - \frac{l}{4}\right)$$



Etude des déplacements sur la ligne $y^2=0.25l$

- Contrainte membranaire la plus singulière



$$T^{11} = \tau^{11}\left(y^1\right)\Phi^{(2)}\left(y^2\right) + \ldots$$

- Loi de comportement (inverse)

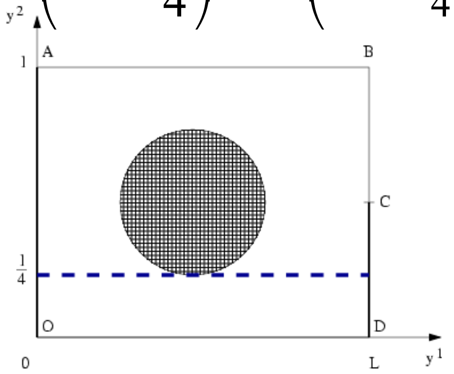
$$\gamma_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta\lambda\mu}T^{\lambda\mu}$$

- Déformations membranaires

$$\gamma_{\alpha\beta} \ \ fonction\ de\ u$$

Résumé des résultats

- Effort imposé en $\left(y^2 - \frac{l}{4}\right)^{1/2} H\left(y^2 - \frac{l}{4}\right)$



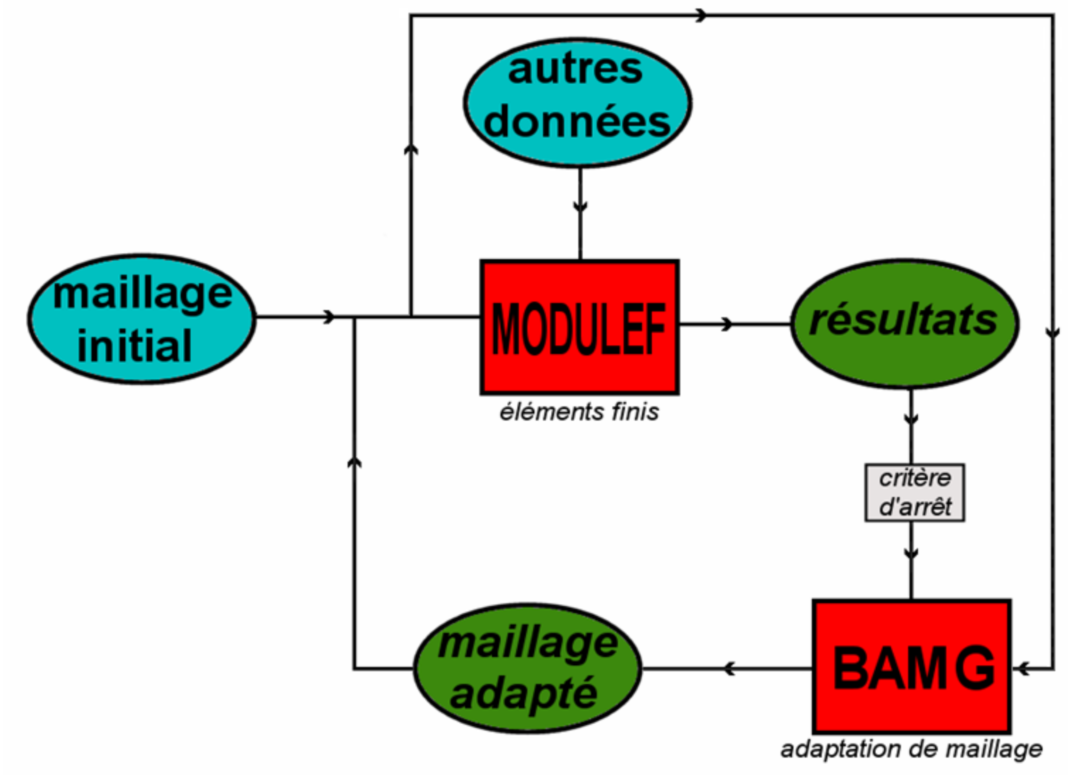
- Ordre des singularités des déplacements

$$\begin{cases} u_1 \quad en \quad \dfrac{d^2}{d(y^2)^2}\left[\sqrt{\left(y^2-\frac{l}{4}\right)}\, H\left(y^2-\frac{l}{4}\right)\right] & (de\ 2\ ordres\ plus\ élevé\ que\ f_3) \\ u_2 \quad en \quad \dfrac{d^3}{d(y^2)^3}\left[\sqrt{\left(y^2-\frac{l}{4}\right)}\, H\left(y^2-\frac{l}{4}\right)\right] & (de\ 3\ ordres\ plus\ élevé\ que\ f_3) \\ u_3 \quad en \quad \dfrac{d^4}{d(y^2)^4}\left[\sqrt{\left(y^2-\frac{l}{4}\right)}\, H\left(y^2-\frac{l}{4}\right)\right] & (de\ 4\ ordres\ plus\ élevé\ que\ f_3) \end{cases}$$

- *Propagation des singularités le long de la caractéristique $y^2=0,25l$*

Calculs numériques

- Calculs numériques effectués avec 2 logiciels qui ont été couplés (thèse de C. De Souza, Paris VI, 2003)



Modulef

- Logiciel éléments finis
  - développé à l'INRIA
  - version 99
- Elément coque utilisé :
  - DKTC (Discret Kirchhoff Theory)

→ avantage : seule la carte est maillée (pas d'approximation par facettes planes)

BAMG (version 0.68)
(Bidimensional Anystrop Mesh Generator)

- Logiciel de maillage adaptatif
  - développé à l' INRIA
  - fonctionne en 2D

- Principe de fonctionnement :
  - Calcul à partir d' un maillage initial
  - BAMG génère ensuite, à partir des résultats obtenus, un nouveau maillage raffiné dans les zones et dans la direction où la solution varie le plus.

BAMG (version 0.68)
(Bidimensional Anistrope Mesh Generator)

- Crée un nouveau maillage en utilisant une métrique modifiée

- La nouvelle métrique est calculée en utilisant le Hessien de la solution :

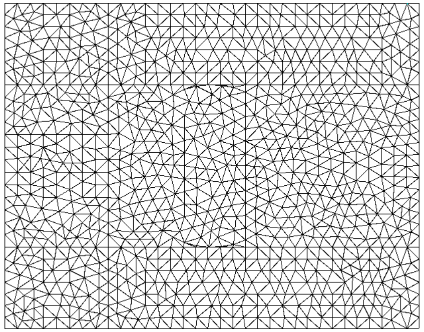
$$\mathcal{M}(t) = \frac{c_0}{\epsilon} |\mathcal{H}| \qquad \text{avec} \qquad |\mathcal{H}| = \mathcal{R} \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1}$$

λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres du Hessien de la solution et R indique les directions correspondantes

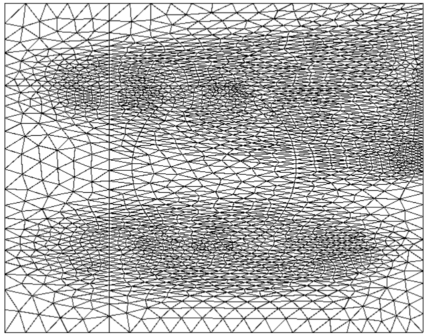
$\Rightarrow$ Le maillage est raffiné dans les régions où les dérivées secondes sont importantes

Résultats numériques

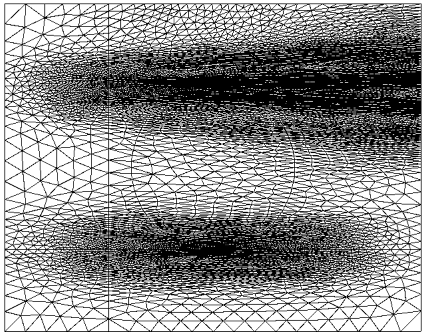
Evolution du maillage ($\varepsilon=10^{-5}$)



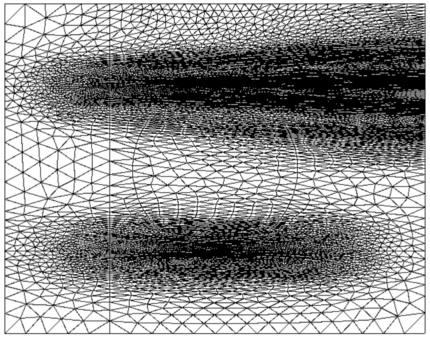
Maillage initial (11275 DDL)



Itération 2 (23226 DOF)



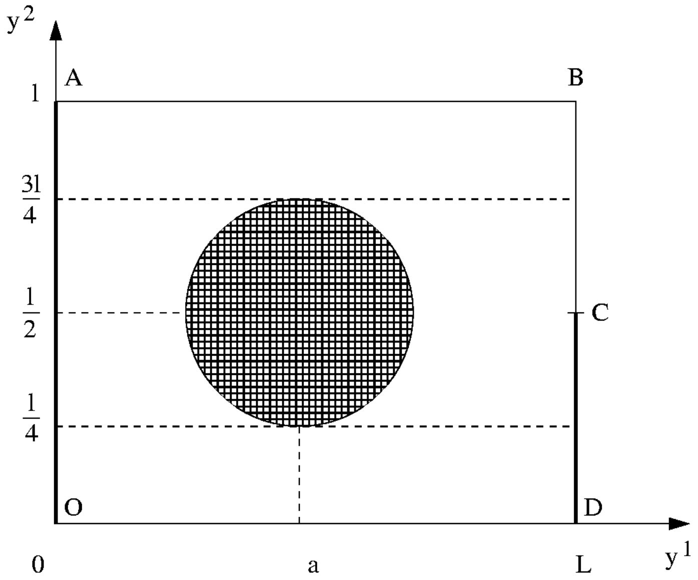
Itération 5 (66778 DOF)



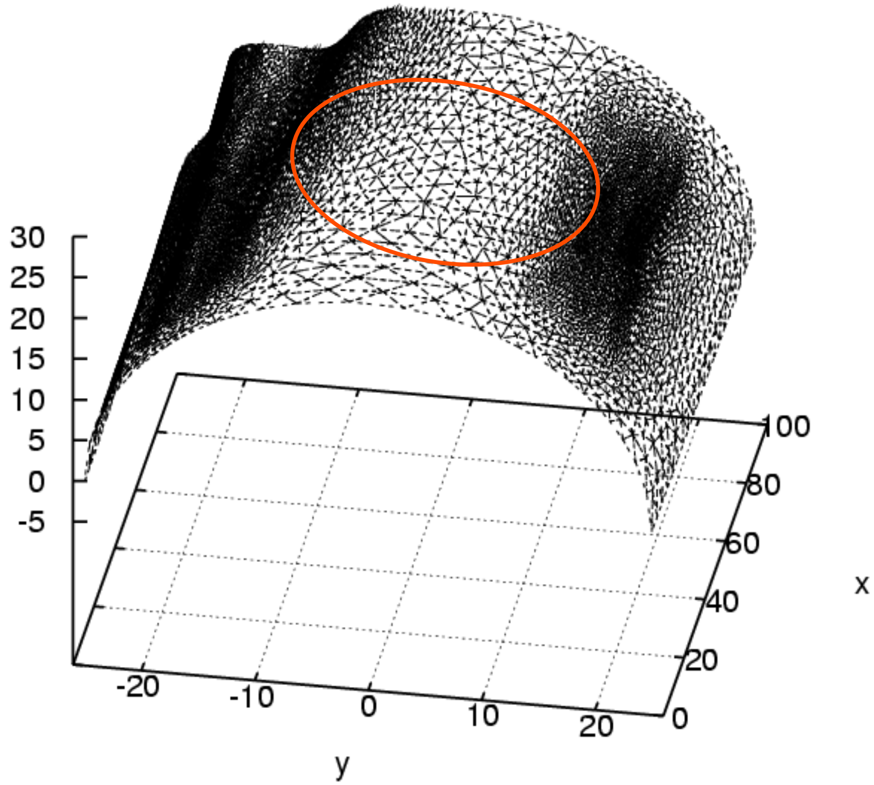
Itération 7 (66283 DOF)

⇨ Rafinement du maillage le long des couches limites

Domaine de chargement et déformée 3D ($\varepsilon=10^{-5}$)

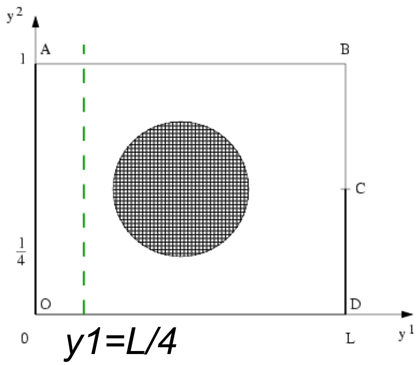


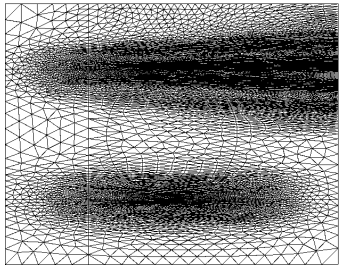
Domaine de chargement

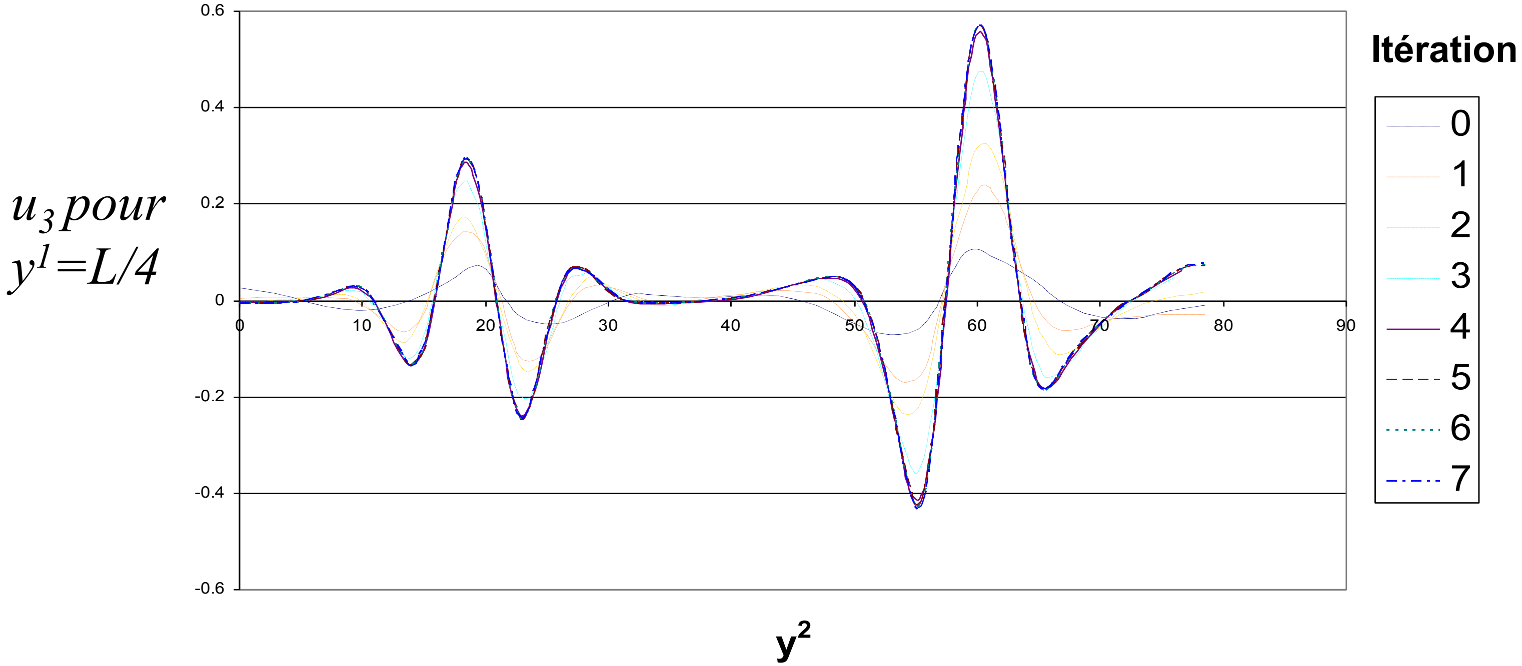


Déformée 3D

Convergence de l'adaptation ($\varepsilon=10^{-5}$)







- Convergence des résultats de la à partir de la 5ème itération
- Les singularités se propagent le long des génératrices

Amplitudes de u - *Dépendance par rapport à ε*

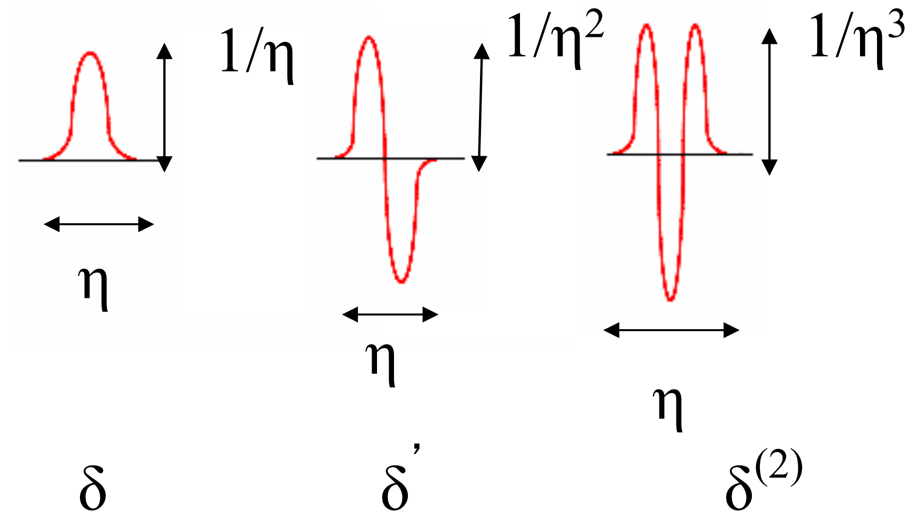
- L'amplitude des déplacements varie avec ε selon la singularité :

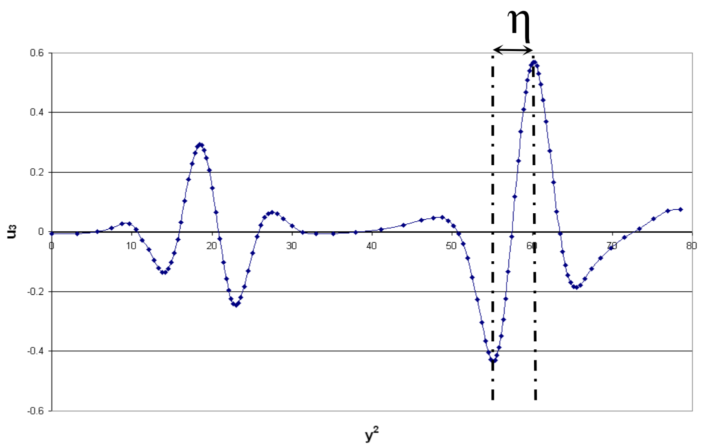
$$\delta \quad en \quad \frac{1}{\eta}$$

$$\delta' \quad en \quad \frac{1}{\eta^2}$$

$$\vdots$$

$$\delta^{(n)} \quad en \quad \frac{1}{\eta^{n+1}}$$

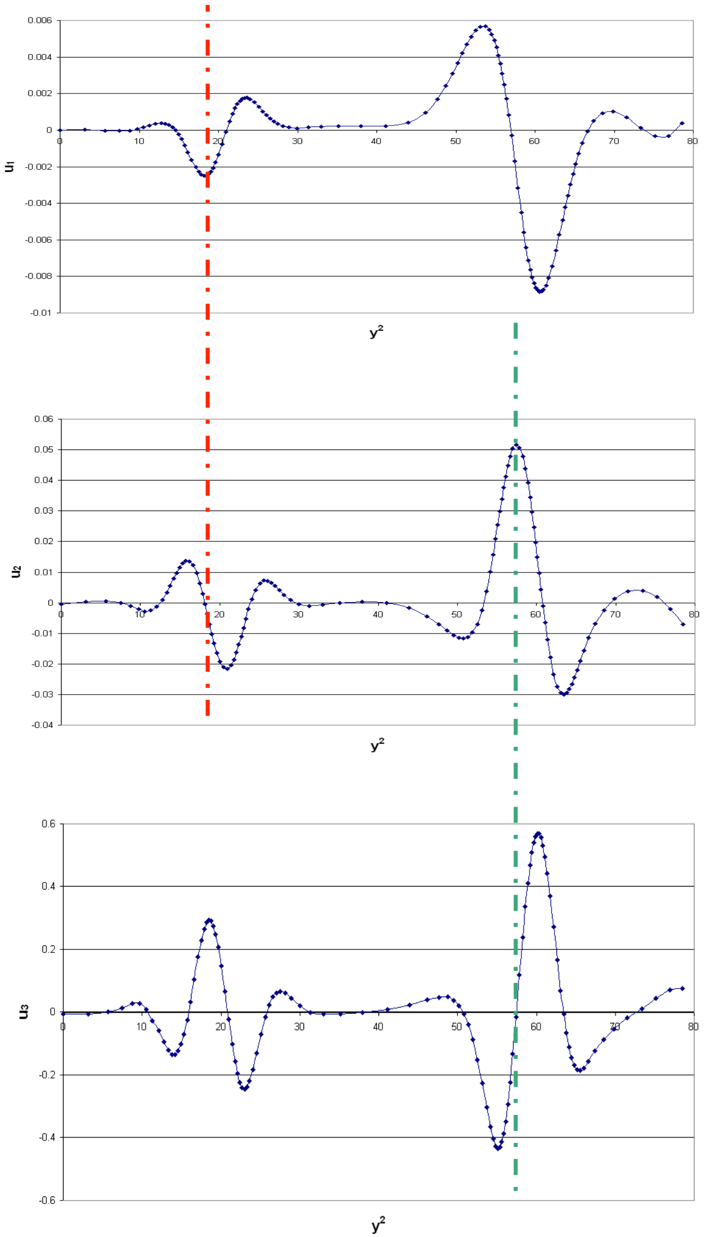




u_3

Forme des déplacements (pour $y^1 = l$)

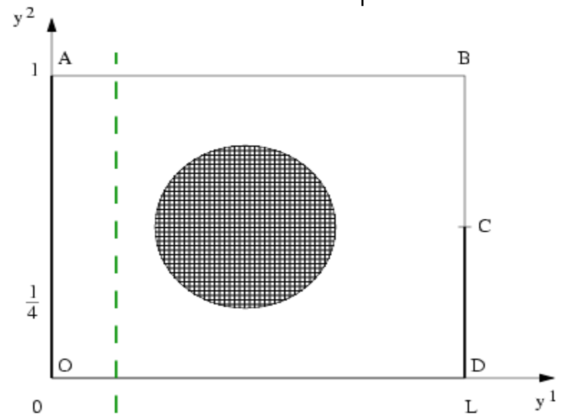
($\varepsilon = 10^{-5}$)

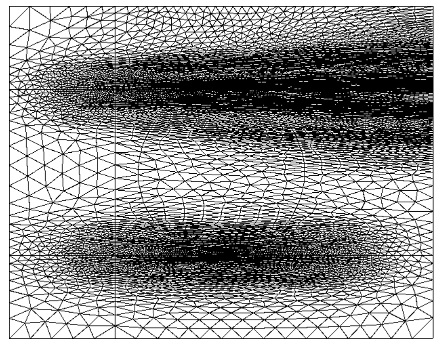


$$u_1(25, y^2)$$

$$u_2(25, y^2) = K \frac{\partial u_1(25, y^2)}{\partial y^2}$$

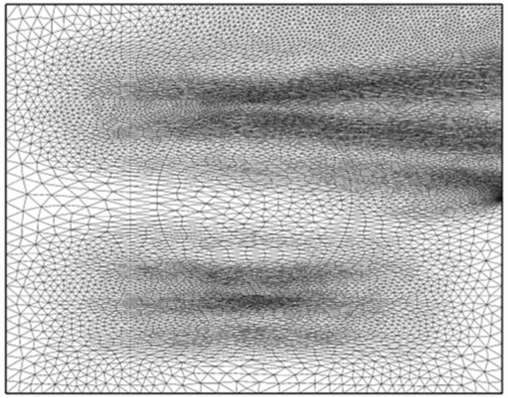
$$u_3(25, y^2) = M \frac{\partial u_2(25, y^2)}{\partial y^2}$$

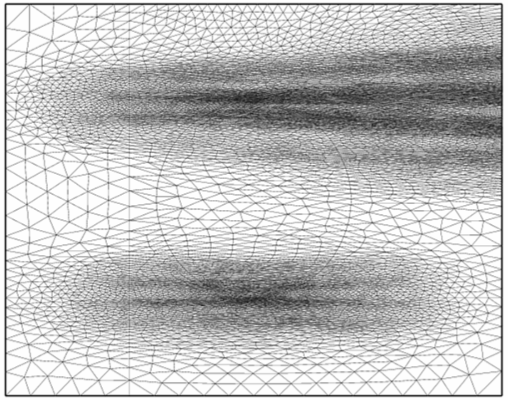


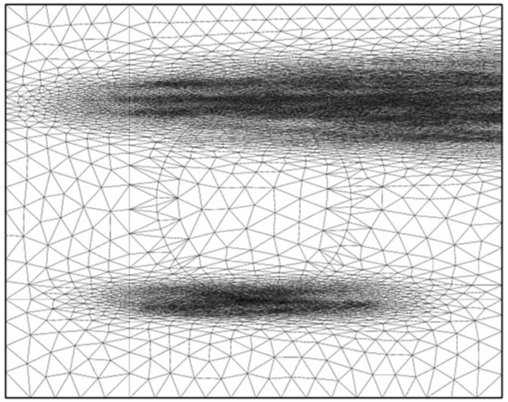


Bon agrément avec la théorie

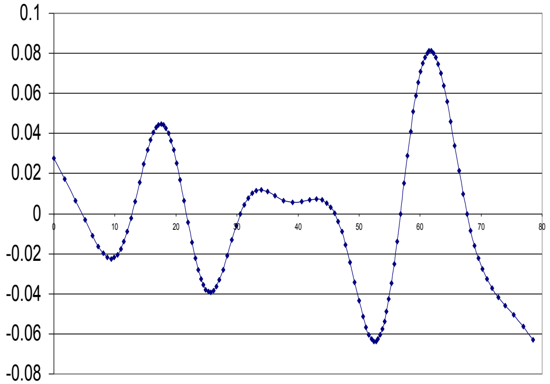
Epaisseur de couche limite

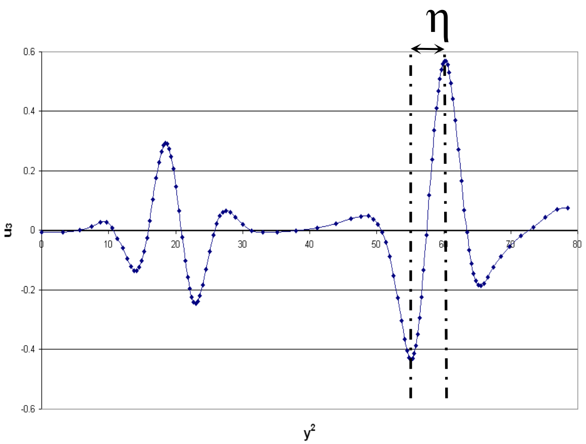


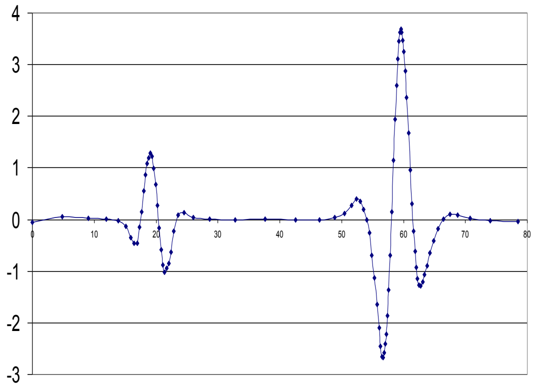




$\varepsilon = 10^{-4}$ $\varepsilon = 10^{-5}$ $\varepsilon = 10^{-6}$





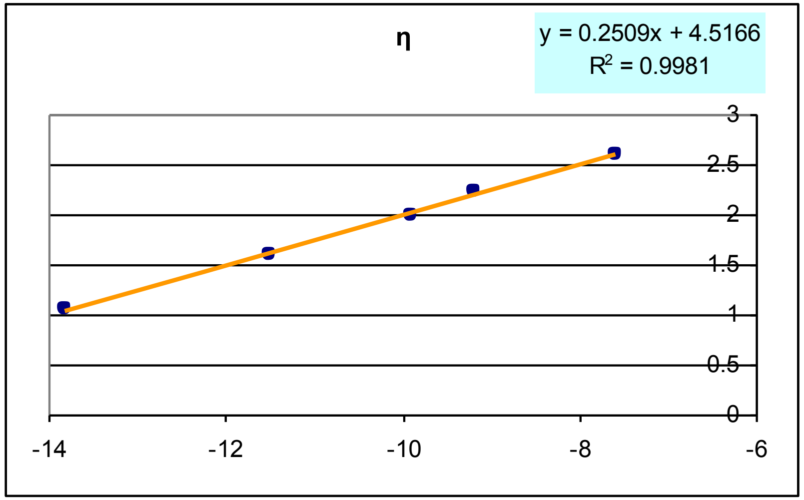


u_3

Résultats numériques

Epaisseur de couche - *Dépendance par rapport à ε*

- Singularité sur une ligne caractéristique



η fonction de ε (échelle logarithmique)

- $\eta = O(\varepsilon^{0.2509})$
- Résultat classique $\eta = O(\varepsilon^{1/4})$ (E. Sanchez-Palencia)

Exemple d'illustration

Rupture d'un gazoduc à Ghislenghien (Belgium), juillet 2004

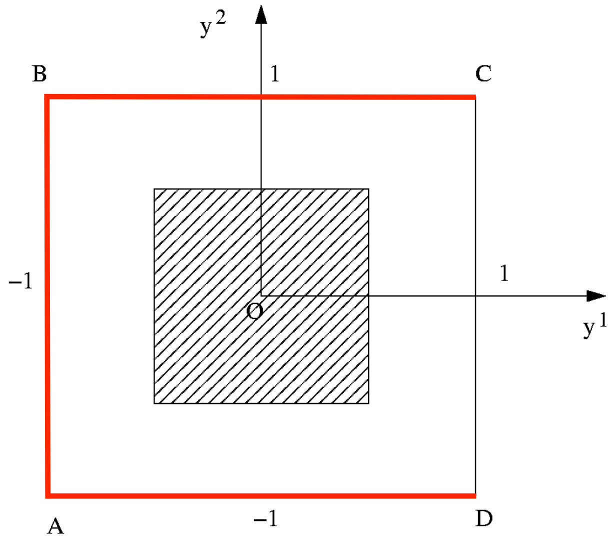
➡ Propagation des singularités le long des génératrices

Cas Elliptique

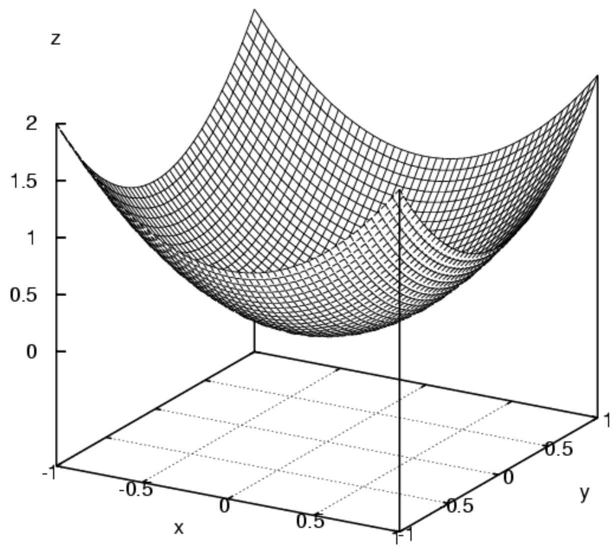
Spécificités

- Pas de lignes asymptotiques
- Importance des conditions aux limites
  - Bien inhibé (encastré sur tout le bord)
    - pas de propagation des singularités
    - u_3 a le même ordre de singularité que f^3
    - épaisseur de couche limite de l'ordre de $\varepsilon^{1/2}$
    - Existence possible de singularités logarithmiques
  - Mal inhibé (une partie du bord est libre)
    - problème dit « sensitif »
    - pas de résultats théoriques généraux
    - problèmes modèles : le nombre d'oscillations sur le bord libre varie en $\ln(1/\varepsilon)$

Exemple du paraboloïde elliptique



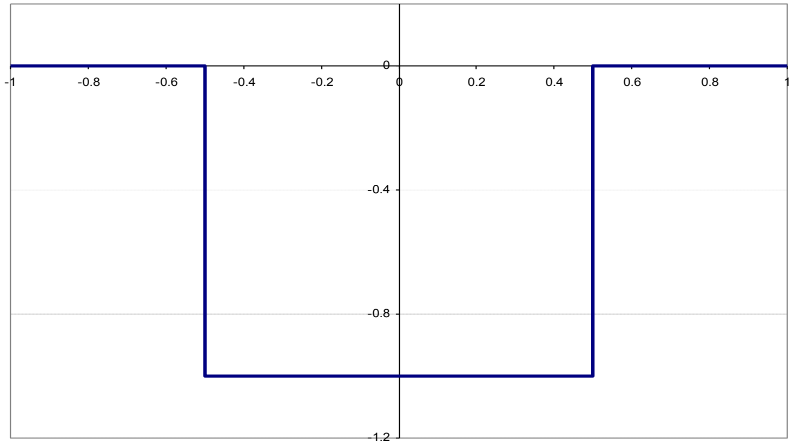
$$\vec{\psi}(y^1, y^2) = \left(y^1, y^2, (y^1)^2 + (y^2)^2\right)$$



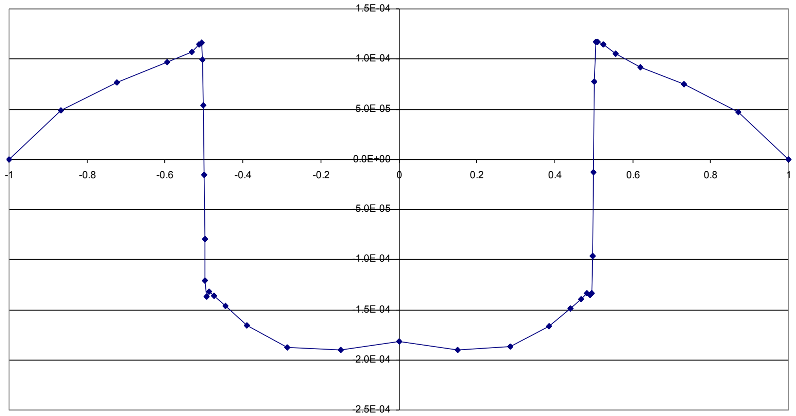
- Chargement $f^3 = -10\varepsilon$ appliqué dans le domaine de chargement (domaine hachuré)

- Conditions aux limites :
  - Encastré sur AB, BC et AD
  - Libre ou encastré sur CD

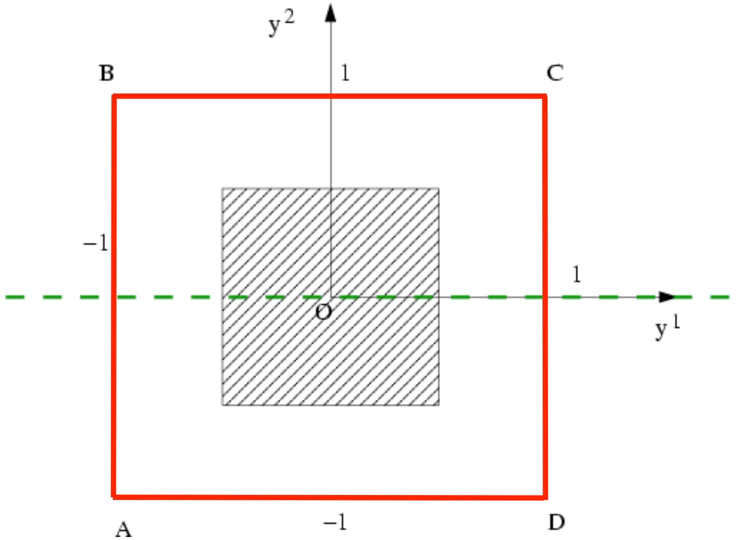
Cas bien inhibé: le bord *CD est encastré*



$f^3\ (y^1)$ (pour $y^2=0$)



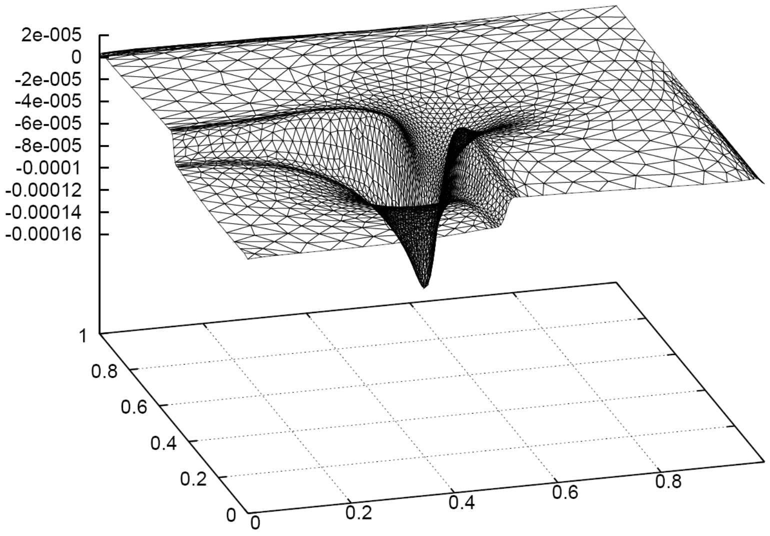
$u_3\ (y^1)$ (pour $y^2=0$ et $\varepsilon=10^{-5}$)



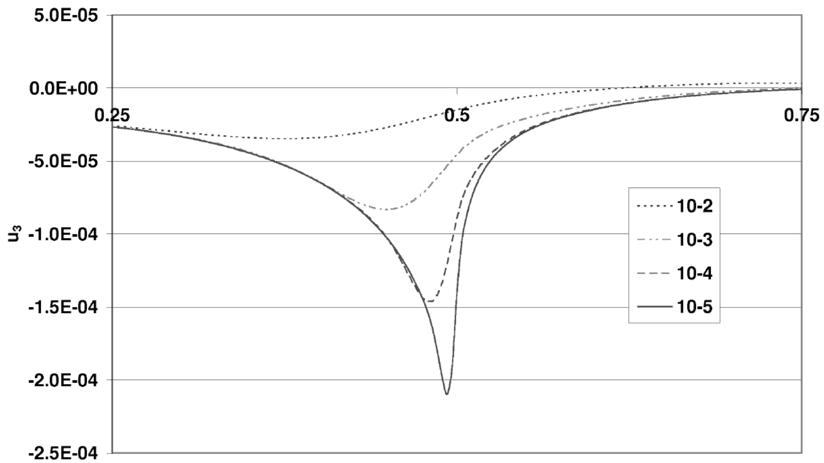
Visualisation sur la ligne $y^2=0$

f^3 a les mêmes singularités que u_3 comme prédit la théorie

Singularité logarithmique ponctuelle



u_3 sur ¼ du domaine

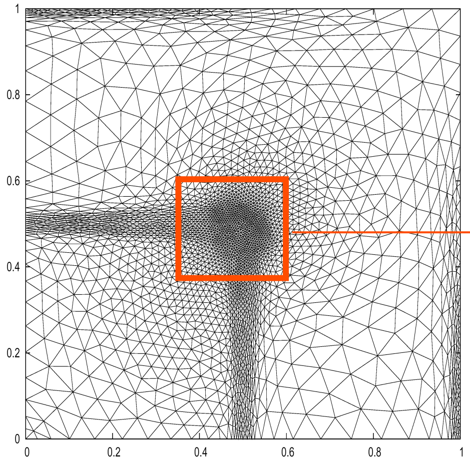


u_3 sur la ligne $y^1=y^2$

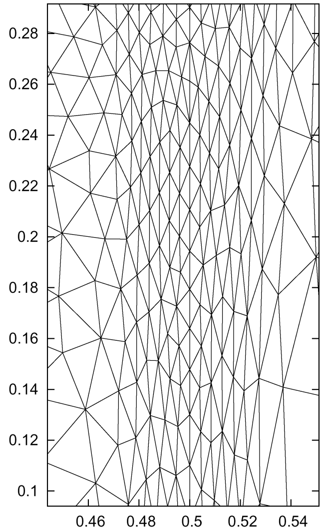
Existence d'une singularité logarithmique ponctuelle

- Si le domaine de chargement a un coin
- Si les courbures principales en ce point sont différentes

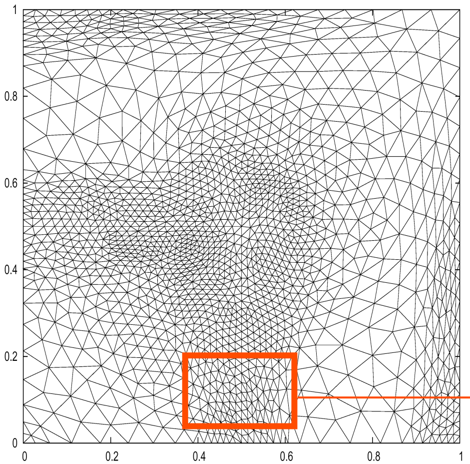
Maillage anisotrope adapté



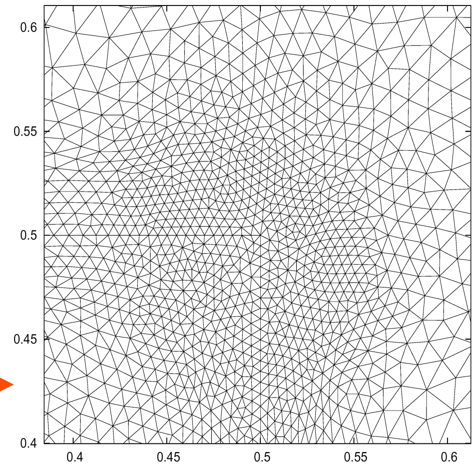
Zoom du maillage



Maillage anisotrope dans la couche



Zoom du maillage

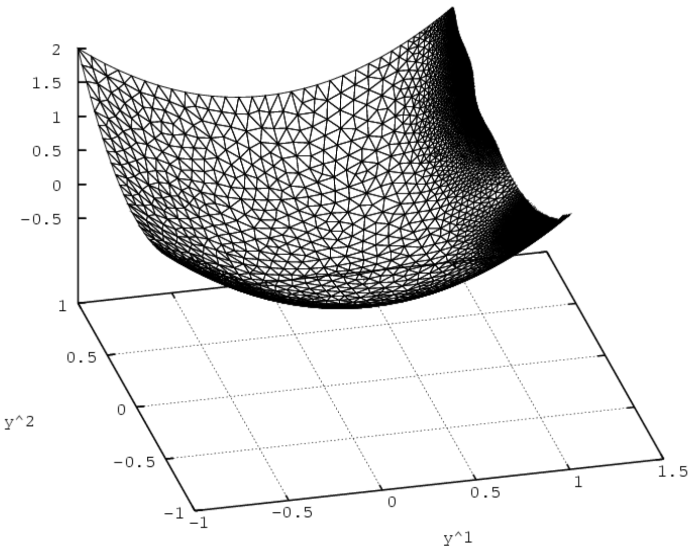


Maillage isotrope aux alentours du coin

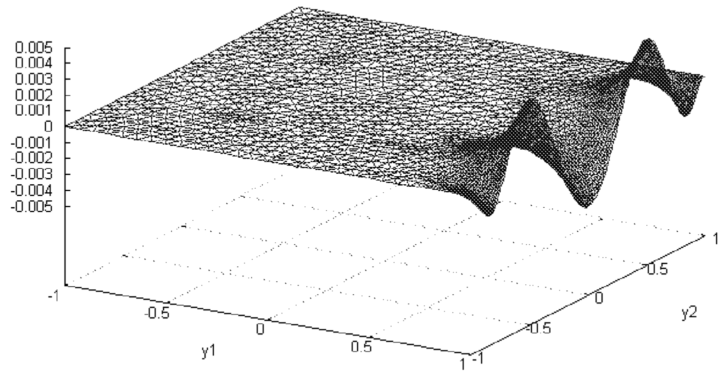
Nécessité d’une procédure adaptative

Cas sensitif

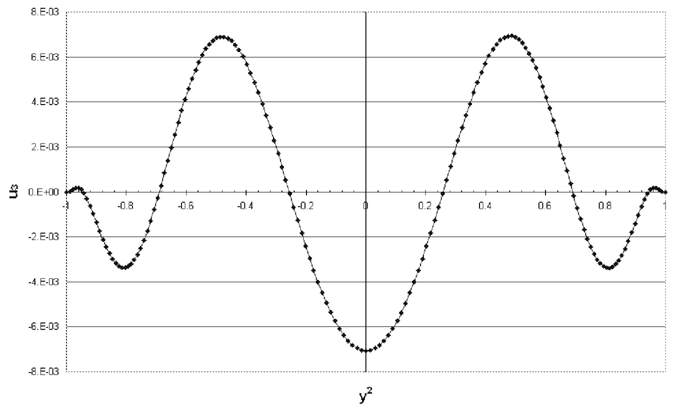
le bord CD est libre



Forme de la déformée $\varepsilon=10^{-4}$



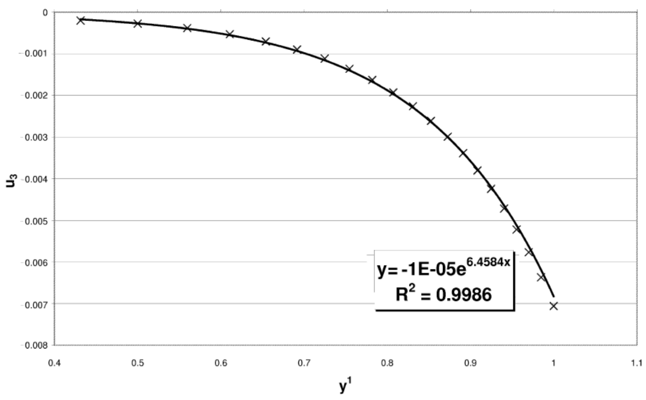
Déplacement u_3 pour $\varepsilon=10^{-4}$

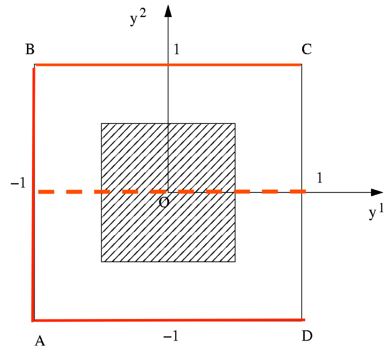


Déplacement u_3 pour $y^1=1$ et $\varepsilon=10^{-4}$

- La condition de Shapiro-Lopatinskii n'est pas satisfaite
- Larges oscillations le long du bord libre

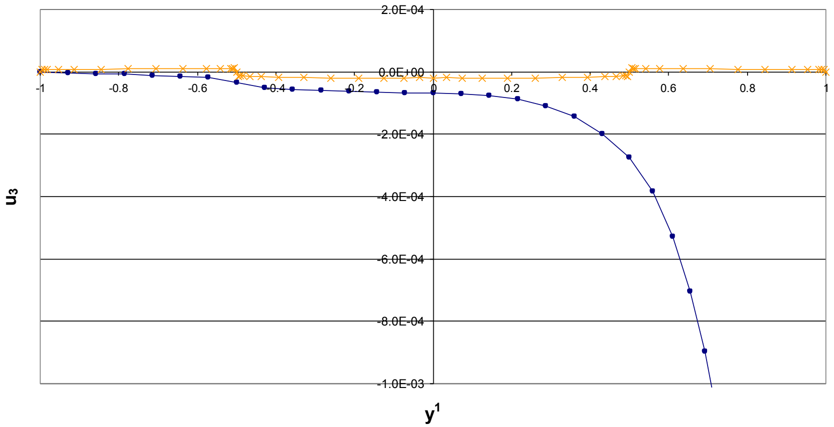
Cas sensitif





Oscillations exponentiellement décroissantes vers l'intérieur du domaine

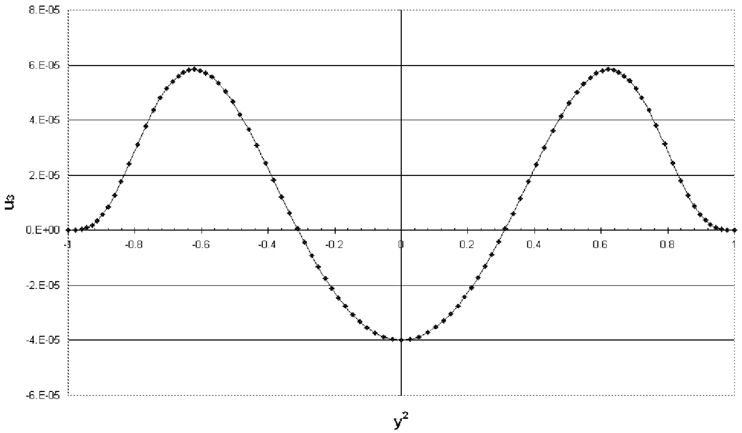
- Comparaison avec le cas bien-inhibé



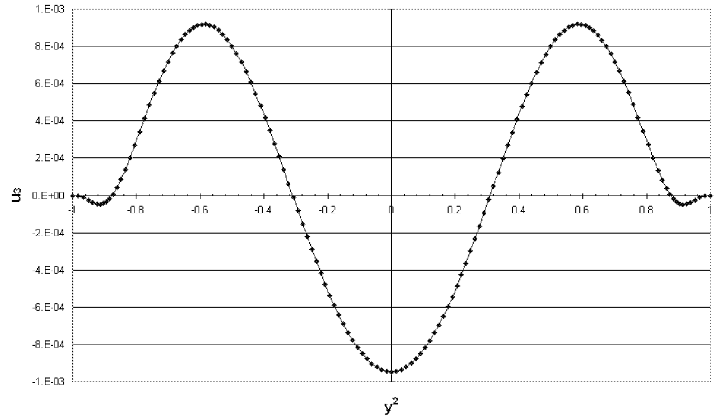
u_3 sur la ligne $y^2=0$

- Les singularités présentes dans le cas bien inhibé sont toujours présentes
- Elles sont cachées par les instabilités importantes qui apparaissent au voisinage du bord libre

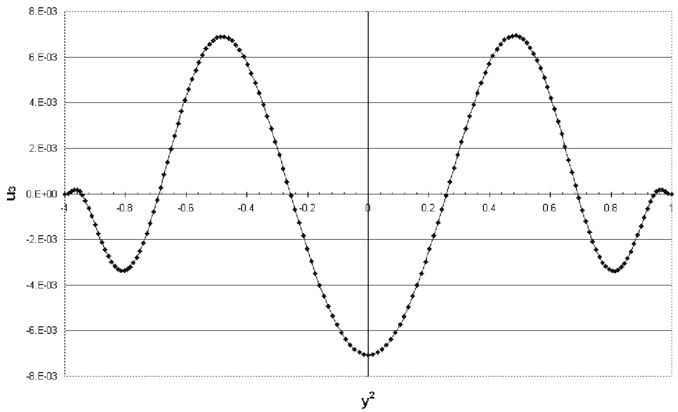
Evolution des oscillations sur le bord libre



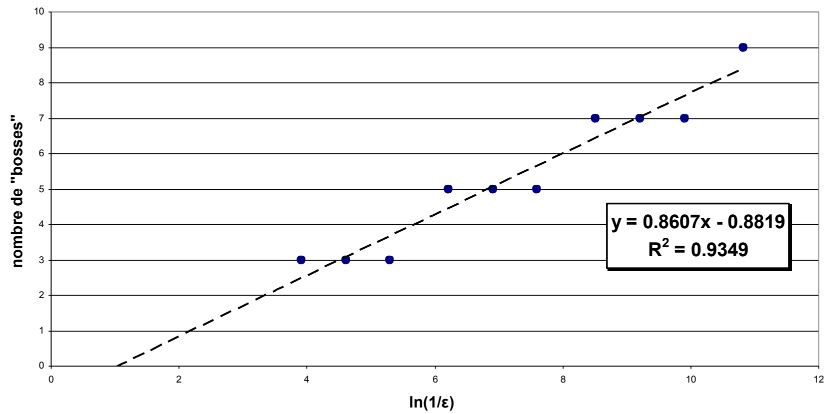
Déplacement u_3 pour $\varepsilon=10^{-2}$



Déplacement u_3 pour $\varepsilon=10^{-3}$



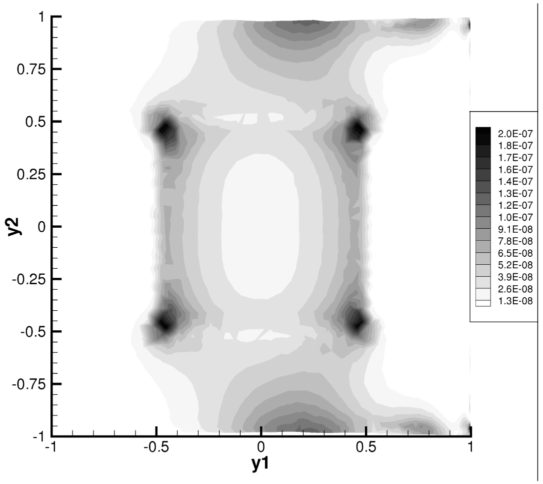
Déplacement u_3 pour $\varepsilon=10^{-4}$



Nombre des oscillations vs $ln(1/\varepsilon)$

➡ Le nombre des oscillations varie comme $ln(1/\varepsilon)$

Energie de membrane et de flexion



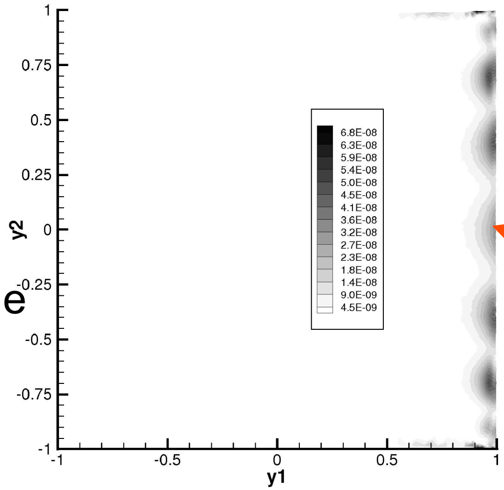
Energie de membrane

Répartition

de la densité

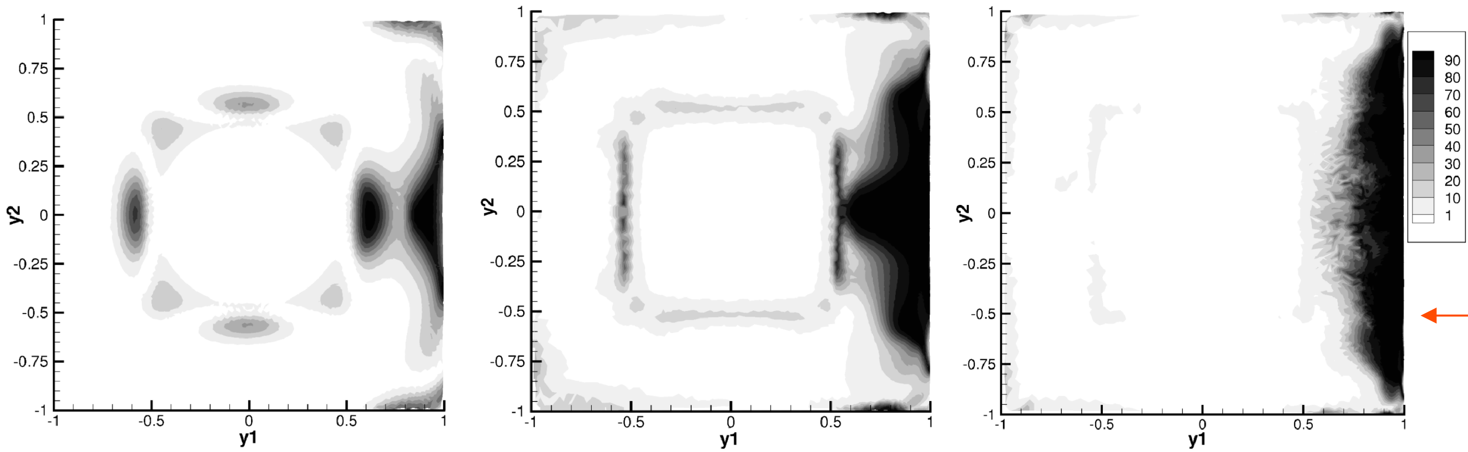
surfacique d’énergie

$\varepsilon=10^{-4}$



Energie de flexion

Bord libres



Pourcentage d’énergie de flexion pour $\varepsilon=10^{-2}$,$\varepsilon=10^{-3}$ et $\varepsilon=10^{-4}$

Conclusions

- Théorie générale des singularités en théorie des coques
- Bonne concordance théorie / simulation numérique
- Simulations numériques réalisées avec MODULEF et BANG couplés ensemble
  - Maillage anisotrope adapté
  - raffinement seulement autour au voisinage des couches et des singularités
  - les déplacements approchent de façon très précise les singularités prédites par la théorie avec seulement un **très petit nombre d'éléments**