

# V Méthodes asymptotiques en théorie des structures minces



# Structures minces



**plaques, coques minces,  
poutres, poutres voiles**

- Rigidité importante
- Poids faible



**Prévoir la déformation pour dimensionner les ouvrages**



Disposer de modèles

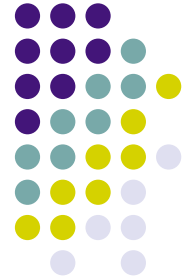
- 2D de plaques et coques
- 1D de poutres et poutre voiles

+

Connaître a priori les  
domaines de validité  
des modèles utilisés



# Différentes approches



- **Hypothèses a priori (cinématiques et statiques)**
    - Kirchhoff et Love, Von Karman (plaques)
    - Koiter, Naghdi, Novozhilov-Donnell, Sanders (coques)
    - Bernouilli, Timoshenko, Vlasov (poutes, poutres à parois minces)
  
  - **Approches directes (surfaiques et linéiques)**
    - Milieux de Cosserat (coques, poutres)
    - Valid, Breuneval (coques)
- Approches asymptotiques
    - Justifier rigoureusement les modèles classiques
    - Préciser leur domaine de validité
    - Construire de nouveaux modèles

# Les approches asymptotiques existantes



## • Mécanique des fluides

- formulation locale des équations d'équilibre
- nombre sans dimension (Reynolds, Stokes, Froude ...)

## • Mécanique des solides

- formulations faibles et variationnelles (perturbations singulières, Lions 1973)
- formulation locale (Goldenveizer, 1962 ; Cimetière, Hamdouni, Millet, 2000' s )

### Plaques et coques

#### *Elasticité linéaire*

Ciarlet, Destuynder (1979)

Sanchez-Palencia (1990)

Modèles de K.Love, N. Donnell  
Membrane et flexion pure

#### *Elasticité non linéaire*

Ciarlet, Destuynder (1980)

Ciarlet, Lods, Miara (1990' s)

Modèle de V. Karman  
membrane et flexion pure NL

Hamdouni, Millet, Cimetière  
(2001, 2003)

Classification des modèles  
asymptotiques de coques  
à partir de l'élasticité NL

### Poutres

#### *Elasticité linéaire*

Rigolot (1973), Rodriguez, Viano  
(1995), Madani, Marigo (1998)

Modèle 1D de poutre droite de  
Bernouilli, modèle enrichi à l'ordre  
2, poutres courbes et modèles  
d'anneaux

#### *Elasticité non linéaire*

Cimetière et al. (1988),

Marigo et al. (1998)

Modèle NL déduit de l'élasticité NL,  
hiérarchie de modèles en fonction  
des efforts appliqués

### Poutres voiles

#### *Elasticité linéaire*

Rodriguez, Viano (1995)

Développement à l'ordre 2  
par rapport au diamètre, puis  
limite épaisseur  $\rightarrow 0$

Diaz, Sanchez-Palencia (2007)

Résultat de convergence pour  
les profils faiblement courbés

Hamdouni, Millet (2011)

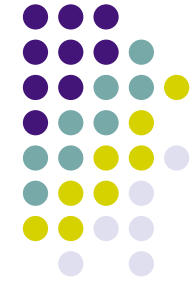
Modèle de couplage flexion-  
torsion

#### *Elasticité non linéaire*

Hamdouni, Millet (2006)

Modèle asymptotique NL de  
poutre voile

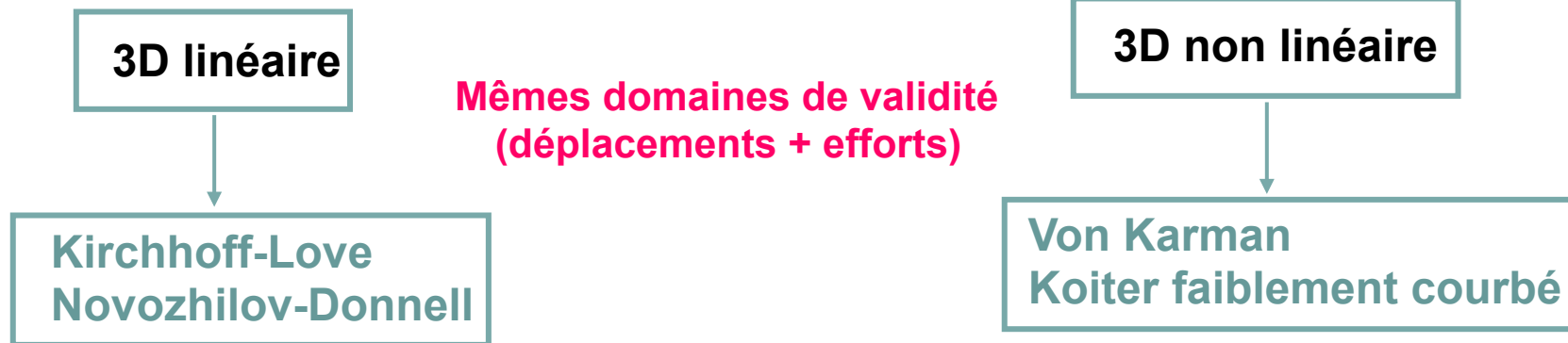
# Limitations en théorie des plaques et des coques



Fondamental  
en non linéaire

- Pb du choix a priori des changements d'échelles
  - sur les déplacements → non constructif
  - sur les efforts → interprétation physique difficile

- Modèles linéaires déduits du 3D linéaire → domaines de validité ?



- Pas de modèles de couplage membrane-flexion en théorie des coques fortement courbées



Koiter modèle asymptotique ?

# Une approche asymptotique constructive



Quel modèle utiliser en fonction des données du problème ?  
Modèle linéaire ou non linéaire ?



**Construction et classification des modèles asymptotiques en fonction  
de leur domaines de validité**

- Formulation locale + adimensionnalisation → Nombres sans dimension
- Pb mono-échelle et développement asymptotique
- Géométrie + efforts + C.L. → déplacements + modèle asymptotique

# Les principaux résultats obtenus



- **Construction et classification des modèles asymptotiques de coques minces à partir de l'élasticité 3D non linéaire**

**Coques faiblement courbées**  
(cas particulier : les plaques)

**Coques fortement courbées**

Prise en compte des forces suivieuses  $\Rightarrow$  formulation eulérienne du problème

- **Extension aux poutres voiles**

**Profils faiblement courbés**

1 modèle linéaire pour des efforts faibles

**profil fortement courbés**

1 modèle NL pour des efforts modérés

1 modèle linéaire pour des efforts faibles  $\neq$  Vlasov

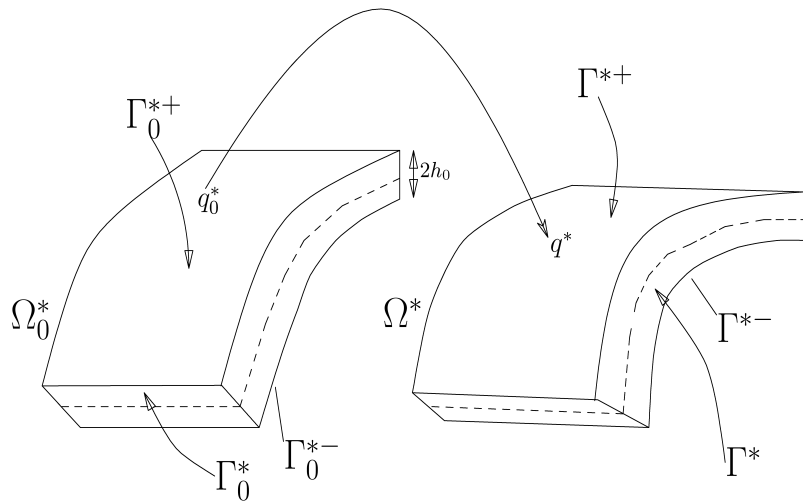
- **Extension à l'élasto-plasticité en théorie des plaques**

# Construction et classification des modèles asymptotiques de coques minces



## • Le problème 3D

$$\phi^* = I_d + U^*$$



$$\mathcal{P}^* \left\{ \begin{array}{l} \text{Div}^*(\Sigma^* \bar{F}^*) = -\bar{f}^* \quad \text{dans } \Omega_0^* \\ (F^* \Sigma^*)^\pm \cdot N_0 = \pm g^{*\pm} \quad \text{sur } \Gamma_0^{*\pm} \\ \phi^* = I_d \quad \text{sur } \Gamma_0^* \\ \Sigma^* = \lambda \text{Tr}(E^*) I_3 + 2\mu E^* \end{array} \right.$$

Forces mortes

## • Echelles de référence du problème

$$\boxed{(V_r, u_r)}, (h_0, L_0, C_r) \quad \text{et} \quad (f_r, g_r) \quad \xrightarrow{\hspace{10em}} \quad \boxed{U^* = V^* + u^* N_0}$$

## • Adimensionnalisation des équations avec $V_r = u_r = L_0$

$$\phi^* \text{ solution de } \mathcal{P}^* \longrightarrow \phi(\varepsilon) \text{ solution de } \mathcal{P}(\varepsilon)$$





- **Nombres sans dimension caractéristiques**

$$\varepsilon = \frac{h_0}{L_0}, \quad \mathcal{C} = h_0 C_r$$

← Géométrie

$$\mathcal{F}_\alpha = h_0 \frac{f_{\alpha r}}{\mu}, \quad \mathcal{G}_\alpha = \frac{g_{\alpha r}}{\mu}, \quad \alpha \in \{t, n\}$$

← Efforts

- **Réduction à un problème mono-échelle**

→ ordre de grandeur de la courbure

$$\mathcal{C} = \varepsilon^2 \quad \text{coques peu profondes}$$

$$\mathcal{C} = \varepsilon \quad \text{coques fortement courbées}$$

→ sélection du niveau d'efforts

$$\text{on commence avec } \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{G}_\alpha = \varepsilon$$

on considère des niveaux d'efforts décroissants

- **Développement asymptotique formel** → ordre de grandeur des déplacements + modèle 2D

$$(V, u) = (V^0, u^0) + \varepsilon(V^1, u^1) + \varepsilon^2(V^2, u^2) + \dots$$

# Classification des modèles de coques



- Niveaux d'efforts en  $\varepsilon$

$$A^{(1)}(V^0, u^0) = f^{(1)}, \quad V_r^{(1)} = u_r^{(1)} = L_0$$

- Niveaux d'efforts plus faibles en  $\varepsilon^2$


$$A^{(1)}(V^0, u^0) = 0$$



**Problème de minimisation associé**

$$\mathcal{J}^{(1)}(V^0, u^0) = \inf_{(V, u) \in H} \mathcal{J}^{(1)}(V, u)$$

- $V^0 = 0 \implies V_r^{(2)} = \varepsilon V_r^{(1)}$
- $V^0 \neq 0 \implies V_r^{(2)} = V_r^{(1)}$
- Même raisonnement pour  $u_0$

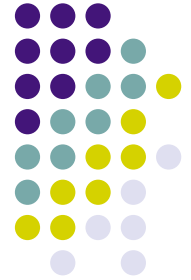

$$A^{(2)}(V^0, u^0) = f^{(2)}$$

- Niveaux d'efforts en  $\varepsilon^n$

$$A^{(n)}(V^0, u^0) = f^{(n)}, \quad V_r^{(n)}, u_r^{(n)} \text{ déterminés}$$

# Coques faiblement courbées ou peu profondes

$$\mathcal{C} = \varepsilon^2$$



# Classification des modèles de coques faiblement courbées



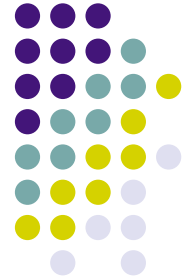
Niveaux d'efforts	$(V_r, u_r)$	Modèle de coque
$\varepsilon$	$(L_0, L_0)$	<i>Modèle non linéaire de membrane</i>
$\varepsilon^2$	$(h_0, h_0)$	<i>"Nouveau" modèle de membrane</i>
$\varepsilon^3$	$(\varepsilon h_0, h_0)$	<i>Modèle de Koiter faiblement courbé ou de Donnell-Mushtari-Vlasov</i>
$\varepsilon^{p \geq 4}$	$h_0(\varepsilon^{p-2}, \varepsilon^{p-3})$	<i>Modèle <u>linéaire</u> de Novozhilov-Donnell</i>



$\mathcal{T}$	$(V_r, u_r)$	<b>Modèles de coques faiblement courbées</b>	$\Delta_t^0, K_t^0$
$\varepsilon$	$(L_0, L_0)$	<i>modèle non linéaire de membrane</i>  $\operatorname{div} \left( n_t^0 \left( I_0 + \overline{\hat{\partial} V^0 / \partial p_0} \right) \right) = -\bar{p}_t$ $\operatorname{div} \left( n_t^0 \overline{\partial u^0 / \partial p^0} \right) = -p_n$	$2\Delta_t^0 = \overline{\frac{\hat{\partial} V^0}{\partial p_0}} + \frac{\hat{\partial} V^0}{\partial p_0} +$ $\frac{\overline{\hat{\partial} V^0}}{\partial p_0} \frac{\hat{\partial} V^0}{\partial p_0} + \frac{\overline{\partial u^0}}{\partial p_0} \frac{\partial u^0}{\partial p_0}$
$\varepsilon^2$ (*)	$(h_0, h_0)$	<i>nouveau modèle non linéaire de membrane</i>  $\operatorname{div}(n_t^0) = -\bar{p}_t$ $\operatorname{div} \left( n_t^0 \overline{\partial u^0 / \partial p^0} \right) + \operatorname{Tr}(n_t^0 C_0) =$ $-p_n - \operatorname{div}(M_t)$	$2\Delta_t^0 = \overline{\frac{\hat{\partial} V^0}{\partial p_0}} + \frac{\hat{\partial} V^0}{\partial p_0}$
$\varepsilon^3$	$(h_0 \varepsilon, h_0)$	<i>modèle non linéaire de coque faiblement courbée de Koiter</i>  $\operatorname{div}(n_t^0) = -\bar{p}_t$ $\operatorname{div}(\overline{\operatorname{div} m_t^0}) + \operatorname{div} \left( n_t^0 \overline{\partial \zeta_n^0 / \partial p^0} \right)$ $+ \operatorname{Tr}(n_t^0 C_0) = -p_n - \operatorname{div}(M_t)$	$2\Delta_t^0 = \overline{\frac{\hat{\partial} \zeta_t^0}{\partial p_0}} + \frac{\hat{\partial} \zeta_t^0}{\partial p_0} +$ $\frac{\overline{\partial \zeta_n^0}}{\partial p_0} \frac{\partial \zeta_n^0}{\partial p_0} - 2\zeta_n^0 C_0$ $K_t^0 = -\frac{\hat{\partial}}{\partial p_0} \overline{\frac{\partial \zeta_n^0}{\partial p_0}}$
$\varepsilon^{n \geq 4}$	$h_0(\varepsilon^{p-2}, \varepsilon^{n-3})$	<i>modèle linéaire de Novozhilov-Donnell</i>  $\operatorname{div}(n_t^0) = -\bar{p}_t$ $\operatorname{div}(\overline{\operatorname{div} m_t^0}) + \operatorname{Tr}(n_t^0 C_0) = -p_n - \operatorname{div}(M_t)$	$2\Delta_t^0 = \overline{\frac{\hat{\partial} \zeta_t^0}{\partial p_0}} + \frac{\hat{\partial} \zeta_t^0}{\partial p_0} - 2\zeta_n^0 C_0$ $K_t^0 = -\frac{\hat{\partial}}{\partial p_0} \overline{\frac{\partial \zeta_n^0}{\partial p_0}}$

$\tau$	Displacements	Plate model	$E_t^0, \rho_t$
$\varepsilon$	$(V_r, u_{3r}) = (L_0, L_0)$	<i>Non-linear membrane model</i>	
	$V^0 = V^0(x_1, x_2)$	$\operatorname{div} \left( N_t^0 \left[ I_2 + \frac{\partial \overline{V^0}}{\partial x} \right] \right) = -p_t$	$2E_t^0 = \frac{\partial \overline{V^0}}{\partial x} + \frac{\partial V^0}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V^0}}{\partial x} \frac{\partial V^0}{\partial x} + \operatorname{grad} u_3^0 \overline{\operatorname{grad} u_3^0}$
	$u_3^0 = u_3^0(x_1, x_2)$	$\operatorname{div} (N_t^0 \operatorname{grad} u_3^0) = -p_3$	
	$V_{ \gamma_0}^0 = u_{3 \gamma_0}^0 = 0$		
$\varepsilon^2$	$(V_r, u_{3r}) = (h_0, h_0)$	<i>Another membrane model</i>	
	$V^0 = V^0(x_1, x_2)$	$\operatorname{div} (N_t^0) = -p_t$	$2E_t^0 = \frac{\partial \overline{V^0}}{\partial x} + \frac{\partial V^0}{\partial x}$
	$u_3^0 = u_3^0(x_1, x_2)$	$\operatorname{div} (N_t^0 \operatorname{grad} u_3^0) = -p_3 - \operatorname{div} M_t$	
	$V_{ \gamma_0}^0 = u_{3 \gamma_0}^0 = 0$		
$\varepsilon^3$	$(V_r, u_{3r}) = (\varepsilon h_0, h_0)$	<i>Non-linear plate model</i>	
	$u_3^0 = \zeta_3^0(x_1, x_2)$	$\operatorname{div} (n_t^0) = -p_t$	$2E_t^0 = \frac{\partial \overline{\zeta_t^0}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_t^0}{\partial x} + \operatorname{grad} \zeta_3^0 \overline{\operatorname{grad} \zeta_3^0}$
	$V^0 = \zeta_t^0(x) - x_3 \operatorname{grad} \zeta_3^0$	$\operatorname{div} (\operatorname{div} m_t^0) + \operatorname{div} (n_t^0 \operatorname{grad} u_3^0)$	$\rho_t = -\operatorname{grad}(\operatorname{grad} \zeta_3^0)$
	$V_{ \gamma_0}^0 = u_{3 \gamma_0}^0 = \frac{\partial u_3^0}{\partial v_0}  _{\gamma_0} = 0$	$= -p_3 - \operatorname{div} M_t$	
$\varepsilon^{3+n}$	$(V_r, u_{3r}) = (\varepsilon h_0, h_0)$	<i>Linear Kirchhoff–Love model</i>	
$n > 0$	$u_3^0 = \zeta_3^0(x_1, x_2)$	$\operatorname{div} (n_t^0) = -p_t$	$2E_t^0 = \frac{\partial \overline{\zeta_t^0}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_t^0}{\partial x}$
	$V^0 = \zeta_t^0(x) - x_3 \operatorname{grad} \zeta_3^0$	$\operatorname{div} (\operatorname{div} m_t^0) = -p_3 - \operatorname{div} M_t$	$\rho_t = -\operatorname{grad}(\operatorname{grad} \zeta_3^0)$
	$V_{ \gamma_0}^0 = u_{3 \gamma_0}^0 = \frac{\partial u_3^0}{\partial v_0}  _{\gamma_0} = 0$		

# « Nouveau » modèle de membrane



- Niveaux d'efforts élevés en  $\varepsilon^2$



Ordre de grandeur des déplacements  $V_r = u_r = h_0$

- Développement asymptotique des équations

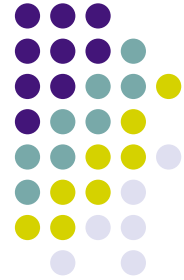
$$\begin{cases} \operatorname{div}(n_t^0) & = -\bar{p}_t \\ \operatorname{div}\left(n_t^0 \frac{\partial u^0}{\partial p_0}\right) + \operatorname{Tr}(n_t^0 C_0) & = -p_n - \operatorname{div}(M_t) \\ (V^0, u^0) & = (0, 0) \quad \text{sur } \gamma^0 \end{cases}$$

$$\text{avec } n_t^0 = \frac{4\beta}{\beta + 2} \operatorname{Tr}(\Delta_t^0) I_0 + 4\Delta_t^0 \quad 2\Delta_t^0 = \frac{\hat{\partial} V^0}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} V^0}{\partial p_0}$$

➔ **Modèle non linéaire qui peut être découplé en 2 problèmes linéaires**

➔ **Ne peut pas être obtenu à partir des équations 3D linéaires**

# Le modèle de Novozhilov-Donnell



- Niveaux d'efforts faibles en  $\varepsilon^4$



Déplacements de références  $V_r = \varepsilon^2 h_0$  et  $u_r = \varepsilon h_0$

- Développement asymptotique des équations



Les déformations deviennent linéaires



**Modèle linéaire de Novozhilov-Donnell**

- ➔ Première justification à partir du 3D non-linéaire
- ➔ Valable pour des déflexions de l'ordre  $\varepsilon h_0$  et non pas de  $h_0$

(  $\neq$  Koiter faiblement courbé )





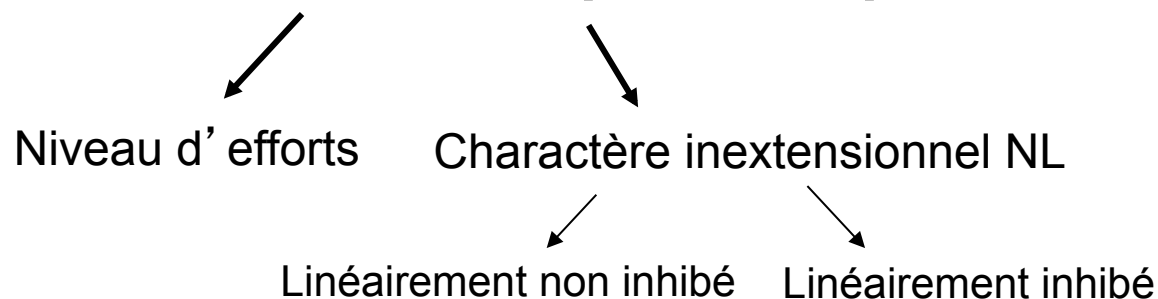
## Les coques fortement courbées

$$\mathcal{C} = \varepsilon$$



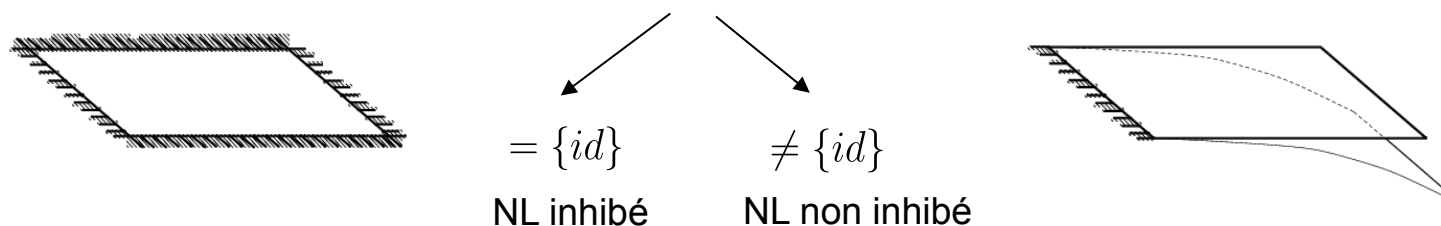


## Classification plus complexe



### • Inhibé / non inhibé non linéairement

$$I_{inex}^{NL}(\omega_0) = \{ \phi : \omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ "régulier", } \overline{\frac{\partial \phi}{\partial p_0}} \frac{\partial \phi}{\partial p_0} = I_0 \text{ et C.L.} \}$$



### • Approche constructive

- ➔ Modèles linéaires de flexion pure et de membrane déduits du 3D NL
- ➔ **Modèle de couplage flexion / membrane**

$\mathcal{T}$	$U_r$	<b>Modèles de coques fortement courbées</b>	$\Delta_t^0, K_t^0$
$\varepsilon$	$L_0$	<i>modèle non linéaire de membrane</i> $\int_{\omega_0} \text{Tr}(n_t^0 \delta \Delta_t^0) d\omega_0 = \int_{\omega_0} \bar{p} \delta \phi^0 d\omega_0$	$2\Delta_t^0 = \frac{\overline{\partial \phi^0}}{\partial p_0} \frac{\partial \phi^0}{\partial p_0} - I_0$
$\varepsilon^2$	$L_0$	<i>modèle avec couplage (couplage 1)</i> $\int_{\omega_0} \text{Tr}(n_t^1 \delta \Delta_t^1 + m_t^0 \delta K_t^0) d\omega^0 =$ $\int_{\omega_0} (\bar{p} \delta U^1 - \text{Tr}(C_0) \bar{M} \delta \phi^0 + \bar{M} \delta N) d\omega_0$	$2\Delta_t^1 = \frac{\overline{\partial \phi^0}}{\partial p_0} \frac{\partial U^1}{\partial p_0} + \frac{\overline{\partial U^1}}{\partial p_0} \frac{\partial \phi^0}{\partial p_0}$ $K_t^0 = \tilde{C} - C_0$ $\phi^0 \text{ est inextensionnel}$
$\varepsilon^3$	$L_0$	<i>modèle non linéaire de flexion pure</i> $\int_{\omega_0} \text{Tr}(m_t^0 \delta K_t^0) d\omega_0 = \int_{\omega_0} \bar{p} \delta U^0 d\omega_0$	$K_t^0 = \tilde{C} - C_0$ $\phi^0 \text{ est inextensionnel}$
$\varepsilon^{n \geq 4}$	$h_0 \varepsilon^{n-2}$	<i>modèle linéaire de membrane si C.L.I.</i> $\int_{\omega_0} \text{Tr}(n_t^0 \delta \Delta_t^0) = \int_{\omega_0} \bar{p} \delta U^0 d\omega_0$	$2\Delta_t^0 = \frac{\hat{\partial} U^0}{\partial p_0} + \frac{\overline{\hat{\partial} U^0}}{\partial p_0}$
$\varepsilon^{n \geq 4}$	$h_0 \varepsilon^{n-4}$	<i>modèle linéaire de flexion pure si C.L.N.I.</i> $\int_{\omega_0} \text{Tr}(m_t^0 \delta K_t^0) d\omega_0 = \int_{\omega_0} \bar{p} \delta U^0 d\omega_0$	$2K_t^0 = \frac{\hat{\partial} \Theta^0}{\partial p_0} + \frac{\overline{\hat{\partial} \Theta^0}}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} U^0}{\partial p_0} C_0 + C_0 \frac{\overline{\hat{\partial} U^0}}{\partial p_0}$ $U^0 \text{ est linéairement inextensionnel}$



**Cas non  
inhibé  
au sens  
non  
linéaire**



**Cas inhibé  
au sens  
non  
linéaire**

$\tau$	$U_r$	<b>Modèle de coque fortement courbées</b>	$\Delta_t, K_t$
$\varepsilon$	$L_0$	<i>modèle non linéaire de membrane</i> $\int_{\omega_0} Tr(n_t^0 \delta \Delta_t^0) d\omega_0 = \int_{\omega_0} \bar{p} \delta \phi^0 d\omega_0$	$2\Delta_t^0 = \overline{\frac{\partial \phi^0}{\partial p_0} \frac{\partial \phi^0}{\partial p_0}} - I_0$
$\varepsilon^2$	$h_0$	<i>modèle linéaire de membrane</i> $\int_{\omega_0} Tr(n_t^0 \delta \Delta_t^0) d\omega_0 = \int_{\omega_0} \bar{p} \delta U^0 d\omega_0$	$2\Delta_t^0 = \overline{\frac{\hat{\partial} U^0}{\partial p_0}} + \frac{\hat{\partial} U^0}{\partial p_0}$
$\varepsilon^{n \geq 3}$	$h_0 \varepsilon^{n-2}$	<i>modèle linéaire de membrane si C.L.I.</i>	...
$\varepsilon^3$	$h_0$	<i>modèle avec couplage (couplage 2) si C.L.N.I.</i> $\int_{\omega_0} Tr(n_t^1 \delta \Delta_t^1 + m_t^0 \delta K_t^0) d\omega_0 =$ $\int_{\omega_0} (\bar{p} \delta U^1 - Tr(C_0) \bar{M} \delta U^0 + \bar{M} \delta \Theta^0) d\omega_0$	$2\Delta_t^1 = \overline{\frac{\hat{\partial} U^1}{\partial p_0}} + \frac{\hat{\partial} U^1}{\partial p_0} + \overline{\frac{\partial U^0}{\partial p_0} \frac{\partial U^0}{\partial p_0}}$ $K_t^0 = \overline{\frac{\hat{\partial} \Theta^0}{\partial p_0}} + \frac{\hat{\partial} \Theta^0}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} U^0}{\partial p_0} C_0 + C_0 \overline{\frac{\hat{\partial} U^0}{\partial p_0}}$ $U^0$ est linéairement inextensionnel
$\varepsilon^{n \geq 4}$	$h_0 \varepsilon^{n-4}$	<i>modèle linéaire de flexion pure si C.L.N.I.</i> $\int_{\omega_0} Tr(m_t^0 \delta K_t^0) d\omega_0 = \int_{\omega_0} \bar{p} \delta U^0 d\omega_0$	$K_t^0 = \overline{\frac{\hat{\partial} \Theta^0}{\partial p_0}} + \frac{\hat{\partial} \Theta^0}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} U^0}{\partial p_0} C_0 + C_0 \overline{\frac{\hat{\partial} U^0}{\partial p_0}}$ $U^0$ est linéairement inextensionnel

# Comparaison « heuristique » avec KOITER



- Epaisseur donnée  $\rightarrow$  modèles différents
- Comportement asymptotique lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$

Elasticité 3D NL

KOITER adimensionnel



Développement asymptotique



$$\Phi_c = \phi_c^0 + \varepsilon(U_c^1 + zN) + \dots \quad \Phi_k = \varphi_k^0 + \varepsilon(\varphi_k^1 + zN) + \dots$$

$(\phi_c^0, U_c^1)$



$(\varphi_k^0, \varphi_k^1)$



Modèle de couplage flexion / membrane

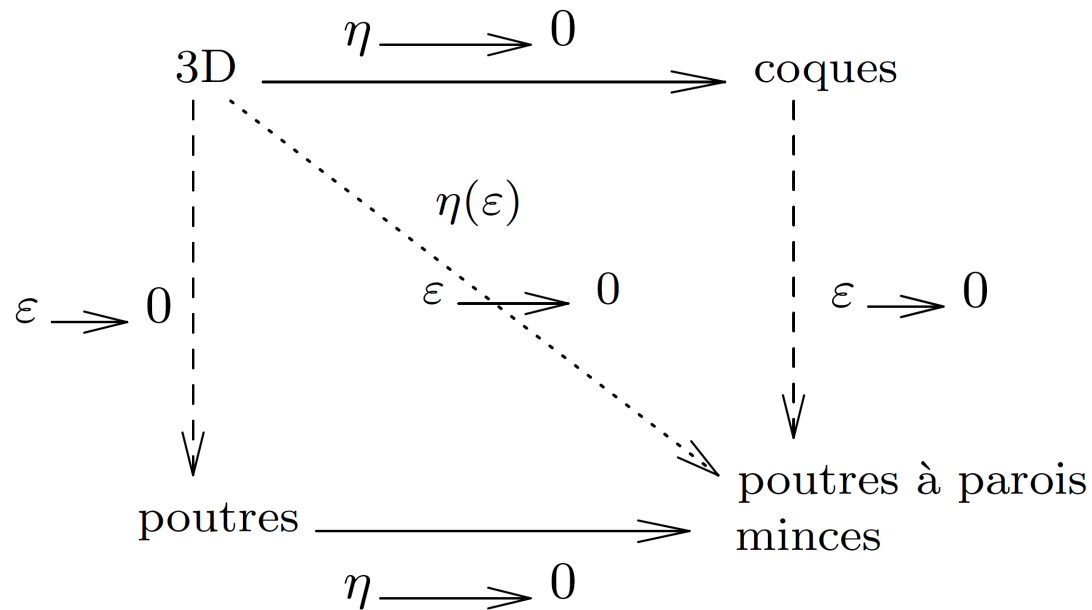
- On peut montrer que  $\Phi_k \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_c$



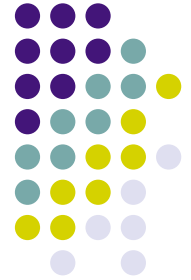
**Et pour une géométrie différente ?**

**Quelques modèles de poutres voiles ...**

# Problème de la non commutativité des passages à la limites



**Le résultat dépend du chemin choisi !**



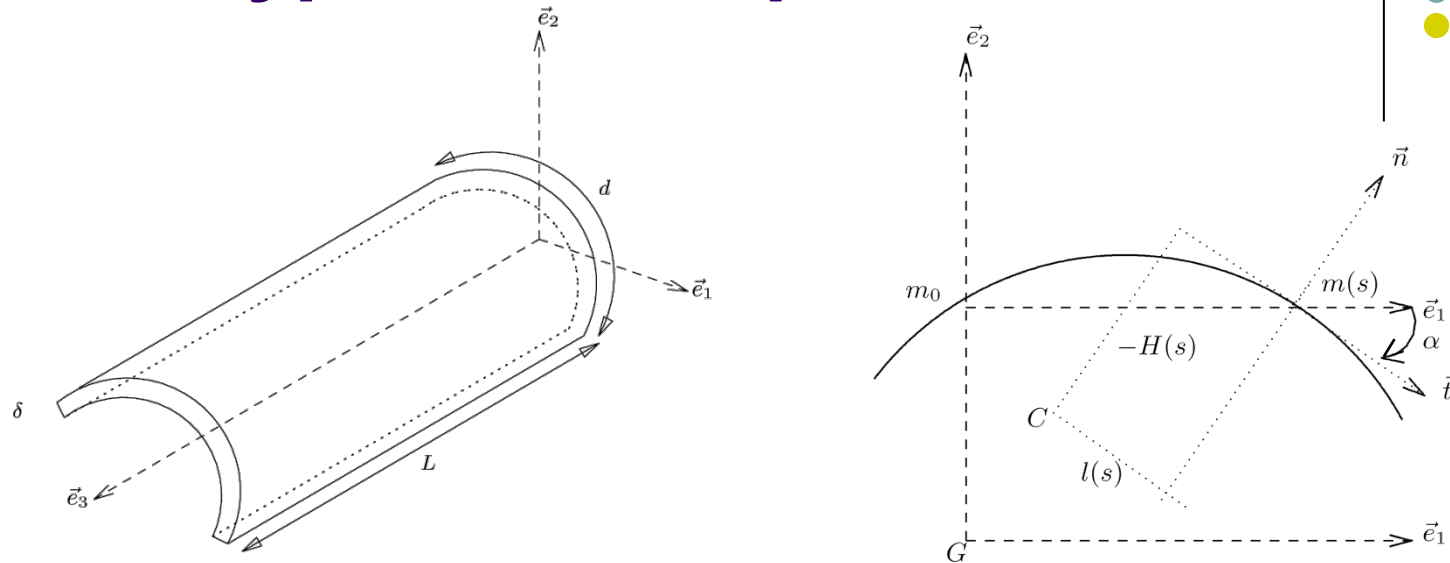
# Rappels sur la théorie de Vlassov en élasticité linéaire

**Modèle « classique » en théorie des poutres voiles, pendant du modèle de Kirchhoff-Love en théorie des plaques ou de Bernouilli en théorie des poutres à sections pleines.**

**V.Z. Vlassov, *Pièces longues en voiles minces*. Eyrolles, Paris, 1962.**



# La théorie de Vlassov basée sur des hypothèses a priori



## □ Les hypothèses cinématiques

**H1** : Le profil est indéformable dans le plan d'une section

**H2** : Il n'y a pas de déformation par distorsion du profil dans le plan  $(t, e_3)$

$$\vec{u}(m) = \vec{u}(C) + \Theta(x_3) \vec{e}_3 \wedge \overrightarrow{Cm}$$

$$\longleftrightarrow \vec{u}(m) = \begin{cases} u_t(s, x_3) = u_1^c(x_3) \cos \alpha + u_2^c(x_3) \sin \alpha + H(s) \Theta(x_3) \\ u_n(s, x_3) = -u_1^c(x_3) \sin \alpha + u_2^c(x_3) \cos \alpha + l(s) \Theta(x_3) \end{cases}$$

# Les hypothèses statiques de la théorie de Vlassov



- H3** : Les contraintes planes  $\sigma_{tt}$ ,  $\sigma_{nn}$ ,  $\sigma_{tn}$  sont négligées devant les autres contraintes  
**H4** : La contrainte normale de traction  $\sigma_{33}$  est supposée constante dans l'épaisseur  
**H5** : La contrainte tangentielle  $\sigma_{t3}$  est une fonction affine en  $r$

$$\sigma_{t3}(s, x_3, r) = \tau(s, x_3) + r\tau'(s, x_3)$$

- Vlassov définit le couple de torsion général  $H_k = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} r\sigma_{t3}(s, x_3, r)dr$

et suppose par analogie avec la torsion pure que :

$$H_k = 2\mu J_d \frac{d\Theta(x_3)}{dx_3}$$

- La rigidité à la torsion est donnée par  $J_d = \frac{\alpha}{3}d\delta^3$   
où  $\alpha$  est une constante empirique qu'il faut déterminer expérimentalement !

# Equations d'équilibre de Vlassov en « base réduite »



## □ « Base réduite » de Vlassov

- Origine O : centre de gravité du profil
- Direction des axes  $e_1$  et  $e_2$  : directions principales d'inertie du profil
- Pôle principal en C : centre de cisaillement du profil

## □ Equations d'équilibre découplées en base réduite

$$ES \frac{d^2 u_3}{dx_3^2} = -P_3 \quad \text{Traction suivant } e_3$$

$$EJ_{\omega\omega} \frac{d^4 \Theta}{dx_3^4} - J_{\omega d} \frac{d^2 \Theta}{dx_3^2} = M_t + \frac{dM_3}{dx_3} \quad \text{Torsion}$$

$$EJ_{11} \frac{d^4 u_1^c}{dx_3^4} = P_1 + \frac{dM_{31}}{dx_3} \quad \text{Flexion suivant } e_1$$

$$EJ_{22} \frac{d^4 u_2^c}{dx_3^4} = P_2 + \frac{dM_{32}}{dx_3} \quad \text{Flexion suivant } e_2$$

➡ Pas de couplage flexion - torsion

# Les contradictions et les limitations de la théorie de Vlassov



## □ Les contradictions de la théorie de Vlassov

**H2** : Il n'y a pas de déformation par distorsion du profil  $\Rightarrow e_{t3} = 0$

Loi de Hooke  $\Rightarrow \sigma_{t3} = 0$

**H5** : La contrainte tangentielle  $\sigma_{t3}$  est une fonction affine en  $r$   $\Rightarrow \sigma_{t3} \neq 0$

$$H_k = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} r \sigma_{t3} dr = 2\mu J_d \frac{d\Theta(x_3)}{dx_3}$$

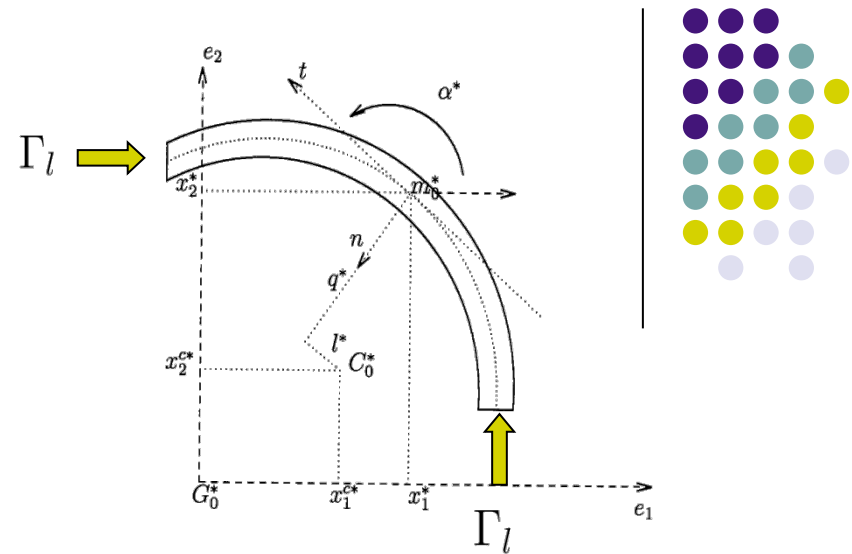
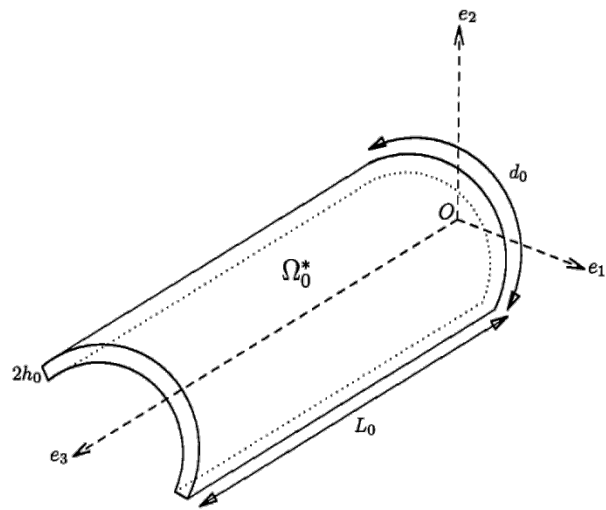
## □ Limitations des approches basées sur des hypothèses « a priori » (théorie de Vlassov, modèle de Kirchhoff-Love ...)

$\Rightarrow$  Domaine de validité des modèles obtenus difficile à préciser

## □ Expression empirique de la rigidité à la torsion $J_d = \frac{\alpha}{3} d\delta^3$



# **Deux modèles asymptotiques en théorie des poutres voiles**



• Equations 3D non linéaires + CL relaxées  $\int_{-h_0}^{h_0} \sigma_{t3} dr = 0$  sur  $\Gamma_l$

• Adimensionnalisation avec  $u_{tr} = u_{3r} = u_{nr} = L_0$

• Nombres sans dimension caractéristiques

$$\varepsilon = \frac{d_0}{L_0}, \quad \eta = \frac{h_0}{d_0}, \quad \nu = h_0 c_r, \quad \mathcal{F}_\alpha = \frac{h_0 f_{\alpha r}}{\mu}, \quad \mathcal{G}_\alpha = \frac{g_{\alpha r}}{\mu}$$

géométrie

• Problème mono-échelle

$$\eta = \varepsilon \text{ poutres voiles}$$

$$\nu = \varepsilon^2 \text{ profil peu profond}$$

$$\nu = \varepsilon \text{ profil fortement courbé}$$

niveaux d'efforts

$$\mathcal{F}_\alpha = \varepsilon^p \text{ et } \mathcal{G}_\alpha = \varepsilon^q$$

# Un modèle NL de poutres voiles fortement courbées



- **Pas de modèle non linéaire «classique»**

Important pour étudier le flambage (Mohri, Azrar, Potier-Ferry, 2001)

- **Profil fortement courbé + efforts modérés**  $\Rightarrow \begin{cases} V_r = d_0 \\ u_{3r} = h_0 \end{cases}$  avec  $V = (u_t, u_n)$   
 $\nu = \varepsilon$        $\mathcal{F}_\alpha = \varepsilon^5$  et  $\mathcal{G}_\alpha = \varepsilon^5$

- **Modèle NL de poutres voiles**

$\Rightarrow$  Cinématique NL de type Vlassov

$$\begin{cases} V^0 = V(x_3) + (R_\Theta - I_2)x \\ u_3^0 = u_3(x_3) - \overline{R_\Theta} x \frac{dV}{dx_3} - \omega_n \frac{d\Theta}{dx_3} \end{cases} \quad \text{avec} \quad R_\Theta = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \text{ autour de } (C_0 e_3)$$

$\omega_n$  : aire sectorielle

$\Rightarrow$  Modèle NL de poutres voiles

4 équations différentielles NL fortement couplées

Termes cubiques en  $\Theta \Rightarrow$  Effets de raccourcissement sous forte torsion  
(Gobarah et Tso, 1971)

# Un modèle linéaire de poutre voile avec couplage torsion-flexion



- Profil fortement courbé + efforts faibles

$$\nu = \varepsilon \quad \mathcal{F}_\alpha = \varepsilon^6 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_\alpha = \varepsilon^6$$



$$\begin{cases} u_{tr} = u_{nr} = h_0 \\ u_{3r} = \varepsilon h_0 \end{cases}$$

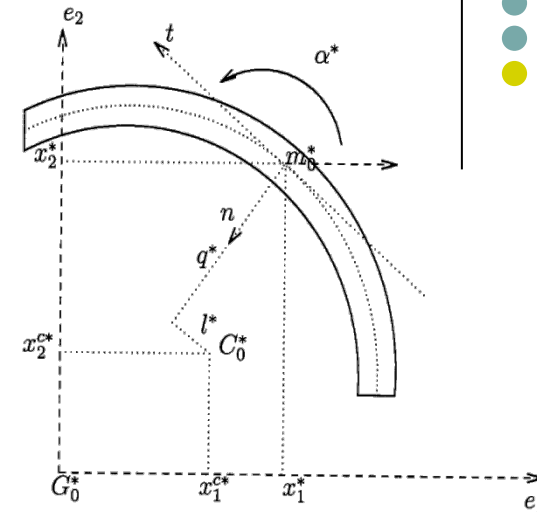
- Cinématique linéaire de Vlassov

$$\begin{cases} \tilde{u}_t^{*0} = \bar{u}_1^{*c} \cos(\alpha) + \bar{u}_2^{*c} \sin(\alpha) - q^*(s) \bar{\Theta}^{*0} \\ \tilde{u}_n^{*0} = -\bar{u}_1^{*c} \sin(\alpha) + \bar{u}_2^{*c} \cos(\alpha) + l^*(s) \bar{\Theta}^{*0} \\ \tilde{u}_3^{*0} = \bar{u}_3^* - x_1^* \frac{d\bar{u}_1^{*c}}{dx_3^*} - x_2^* \frac{d\bar{u}_2^{*c}}{dx_3^*} - \omega^* \frac{d\bar{\Theta}^{*0}}{dx_3^*} \end{cases}$$

Couplage torsion-flexion  
≠ Vlasov

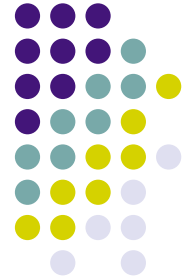
- Modèle 1D en base réduite

$$\begin{aligned} ES^* \frac{d^2 \bar{u}_3^{*0}}{dx_3^{*2}} &= -P_3^* \\ EJ_{\omega^* \omega^*}^* \frac{d^4 \bar{\Theta}^{*0}}{dx_3^{*4}} - \mu J_{\omega^* d}^* \frac{d^2 \bar{\Theta}^{*0}}{dx_3^{*2}} &= M_t^* + \frac{dM_3^*}{dx_3^*} \\ EJ_{11}^* \frac{d^4 \bar{u}_1^{*c}}{dx_3^{*4}} - \mu J_{1d}^* \frac{d^2 \bar{\Theta}^{*0}}{dx_3^{*2}} &= P_1^* + \frac{dM_{31}^*}{dx_3^*} \\ EJ_{22}^* \frac{d^4 \bar{u}_2^{*c}}{dx_3^{*4}} - \mu J_{2d}^* \frac{d^2 \bar{\Theta}^{*0}}{dx_3^{*2}} &= P_2^* + \frac{dM_{32}^*}{dx_3^*} \end{aligned}$$





# Interprétation des résultats



## □ Couche limite en contraintes

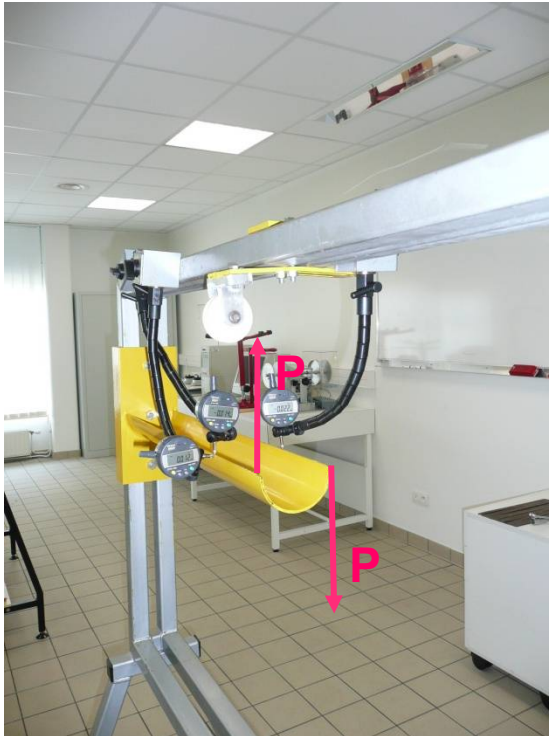
$$\sigma_{t3} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{t3}^i = 0 \quad \forall i \\ \text{sur } \Gamma_l \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{t3}^3 = -2r \frac{d\bar{\Theta}^0}{dx_3} \end{array} \right. \Rightarrow \bar{\Theta}^0 = 0 \quad \text{Vlassov sans torsion}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{C.L. relaxée} \\ \int_{-h_0}^{h_0} \sigma_{t3} dr = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Couplage flexion-torsion} \\ \neq \text{Vlassov}$$

## □ Vlassov : un modèle asymptotique ?

- Formulation faible  $\Rightarrow$  mêmes résultats
- Modèle de coques de Koiter  $\rightarrow$  Vlassov quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  mais Koiter modèle non asymptotique (Béchet et al., 2009)
- Pas de résultat de convergence 3D  $\rightarrow$  Vlassov

# Vlassov ou pas Vlassov : laissons l'expérience trancher ...



Sollicitation en torsion pure  
 $R=52\text{mm}$ ,  $L=648\text{mm}$ ,  $e=4\text{mm}$

Modèle de Vlassov



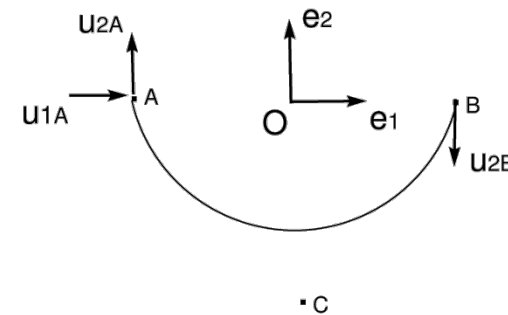
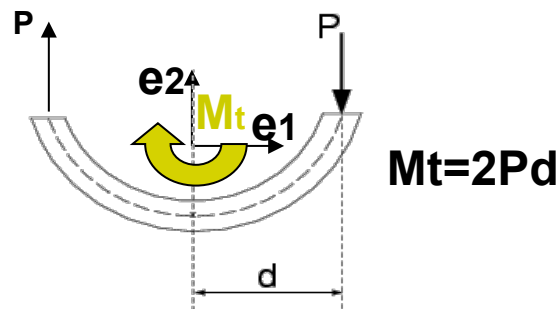
$$\begin{cases} \Theta \neq 0 \\ u_1^c = u_2^c = 0 \end{cases}$$

Modèle de couplage torsion-flexion

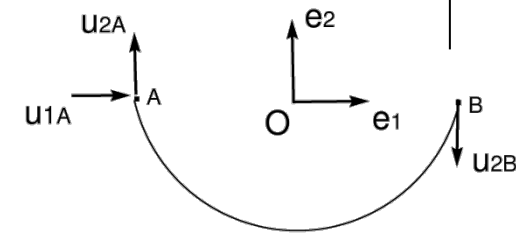
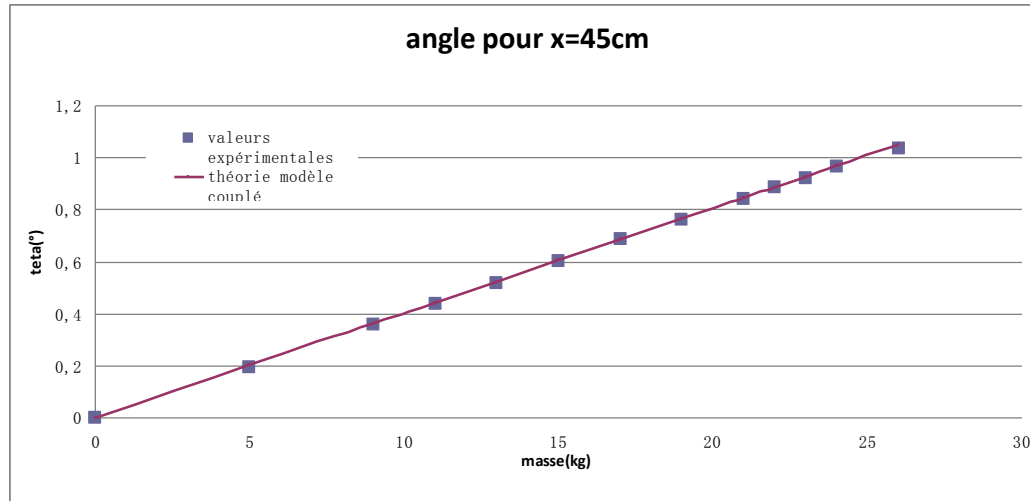
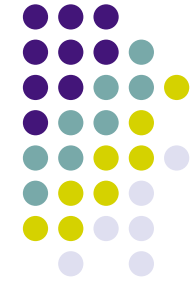


$$\begin{cases} \Theta \neq 0 \\ u_2^c = 0 \end{cases}$$

mais  $u_1^c \neq 0$



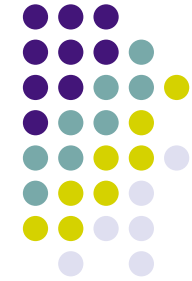
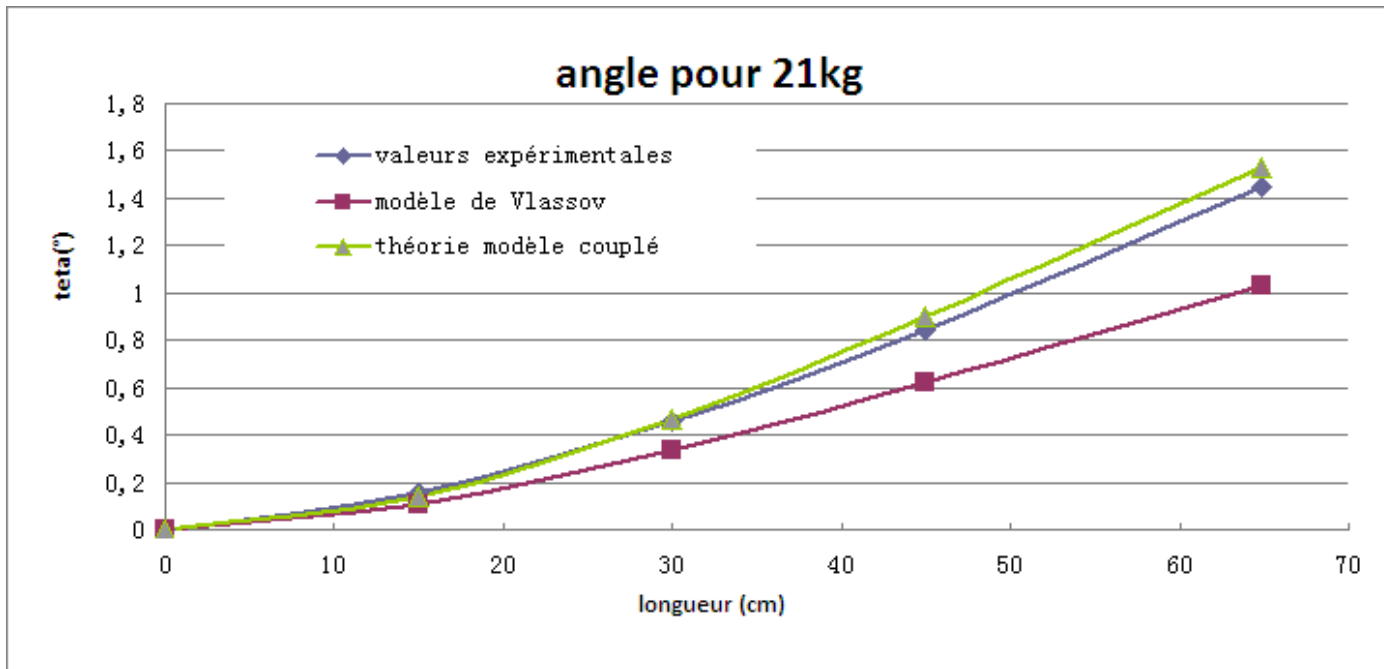
# Mesure expérimentale de l'angle de torsion



$$\Theta = \text{Arctan} \left( \frac{|u_2^A| + |u_2^B|}{2R} \right)$$

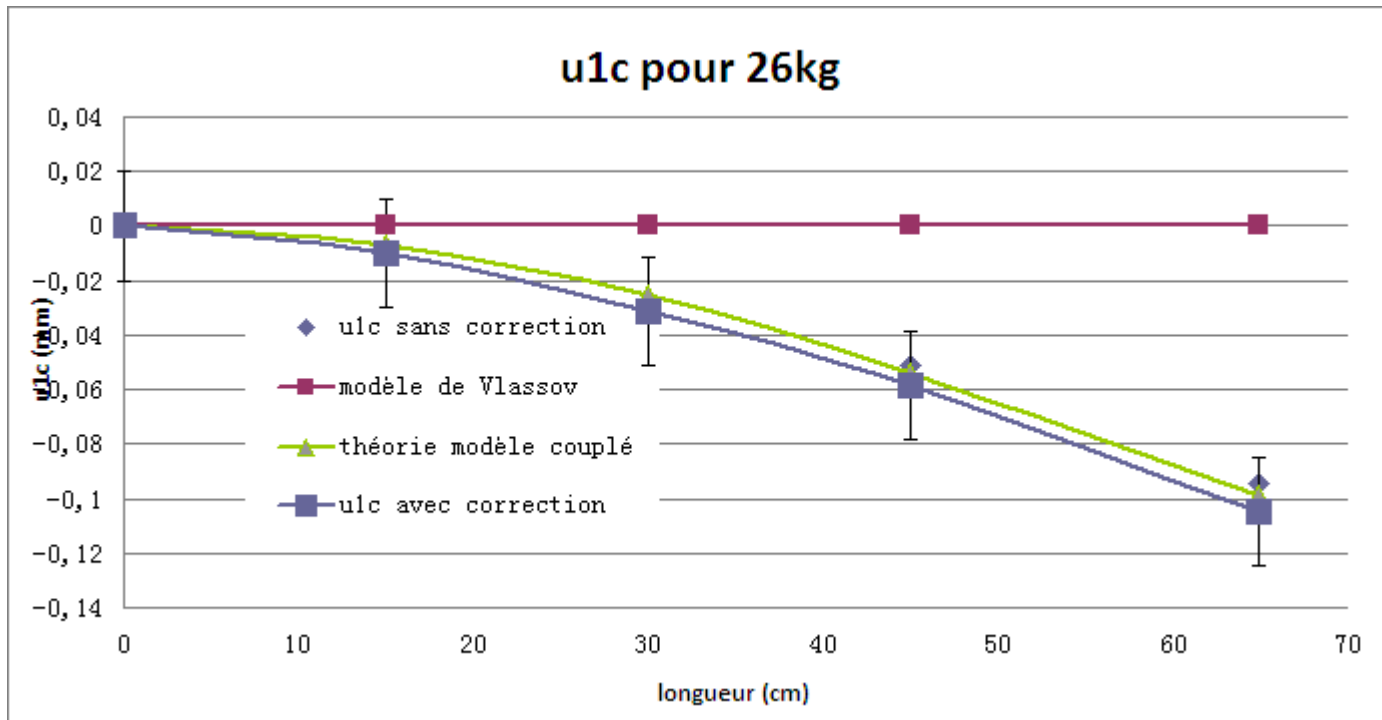
**Variation de l'angle de torsion en fonction de la masse (ou du couple exercé)**

- **Validation des mesures expérimentales**
- **Validation de la solution théorique et de la valeur de la rigidité à la torsion**
- **Assure que l'on reste dans la domaine linéaire pour des angles de torsion petits**



Variation de l'angle de torsion en fonction de  $x_3$  pour une masse imposée de 26kg (couple de 13,3 Nm)

- Très bonne concordance théorie modèle couplé – mesures expérimentales. Erreur maximum de l'ordre de 4%
- Valeur théorique générale correcte de la rigidité à la torsion  $J_{\omega d}$  donnée par le modèle couplé
- Pas d'estimation précise de la rigidité à la torsion  $J_{\omega d}$  donnée par Vlassov



Variation de  $u_{1c}$  en fonction de  $x_3$  pour une masse imposée de 26kg (couple de 13,3 Nm)

- **Bonne concordance théorie (modèle couplé) – mesures expérimentales**
- **Le modèle de Vlassov ne permet pas de prédire le couplage flexion- torsion observé expérimentalement**