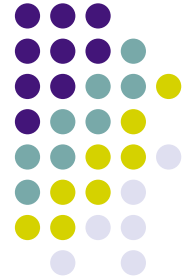
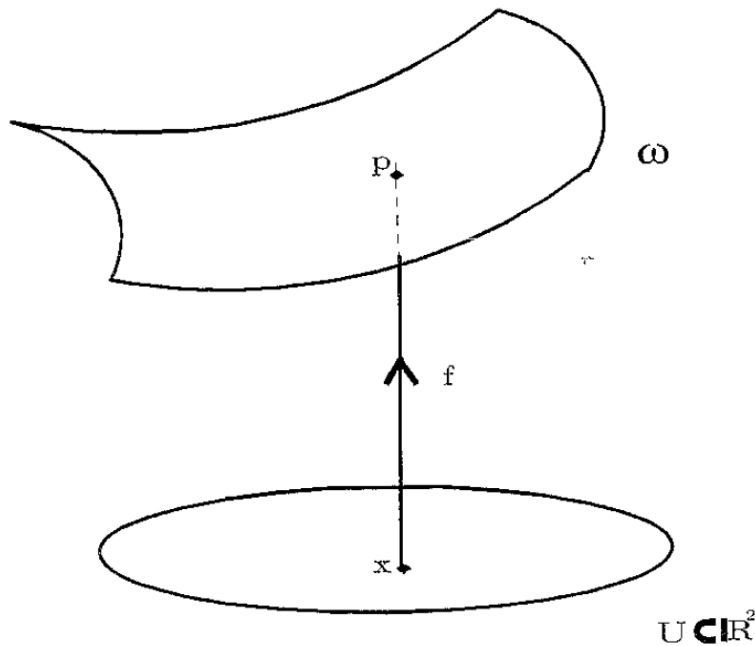


III Rappel de géométrie différentielle des surfaces



- Paramétrisation d' une surface
- Dérivation d' un champ de vecteurs tangents
- Dérivation d' un champ de vecteur quelconque à support sur une surface
- Gradient d' un champ de vecteurs défini en tout point de la coque - Application à la théorie des coques

Surface paramétrée



$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x = (u, v) \mapsto p = f(x)$$

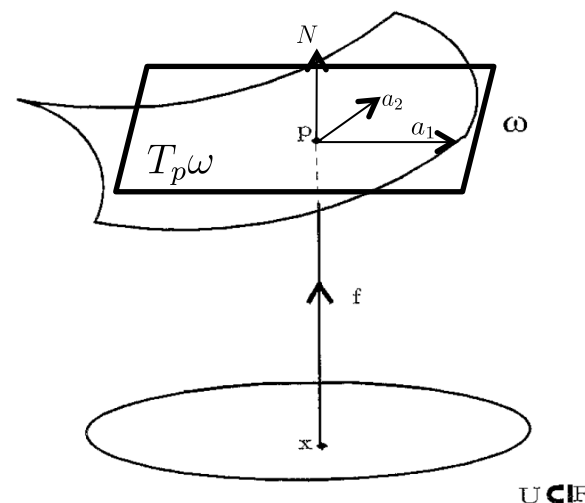
- f : plongement (immersion injective) de U dans \mathbb{R}^3
- ω : surface paramétrée
- (U, f) ou simplement f : carte de ω (carte globale)

Base naturelle de ω



- Base naturelle du plan tangent $T_p\omega$

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial u} \quad a_2 = \frac{\partial f}{\partial v} \quad \longrightarrow \quad N = \frac{a_1 \wedge a_2}{\|a_1 \wedge a_2\|}$$



- Application linéaire tangente

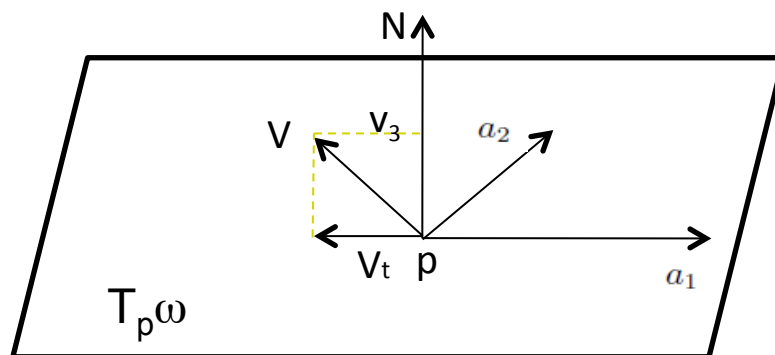
$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p\omega$$

$$dx \mapsto dp = \frac{\partial f}{\partial x} dx = S dx \quad \text{avec} \quad S = [a_1 \ a_2] \quad \text{base naturelle de } \omega$$

- Métrique induite sur ω et première forme fondamentale

$$ds^2 = \overline{dp} dp = \overline{dx} G dx \quad \longrightarrow \quad G = \overline{\frac{\partial p}{\partial x}} \frac{\partial p}{\partial x} = \overline{S} S$$

Décomposition d'un vecteur à support sur ω



$$\mathbb{R}^3 = T_p\omega \oplus \mathbb{R}N \quad \left| \begin{array}{l} I_3 = \Pi + N\bar{N} \quad \text{projection sur le plan tangent} \\ N\bar{N} = N \otimes N \quad \text{projection sur la normale} \end{array} \right.$$

Décomposition d'un vecteur de \mathbb{R}^3 à support sur la surface ω

$$\longrightarrow V = \Pi V + N\bar{N}V = V_t + v_3N$$



Dérivée covariante d'un champ de vecteurs tangents

Soit $p \mapsto dp = Sdx$ et $p \mapsto V_t = SY$ deux champs de vecteurs tangents en p à ω . La dérivée dV_t du champ de vecteurs V_t suivant la direction dp n'est en général pas tangente à ω .

On définit l'application linéaire tangente :

$$\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} : T_p\omega \rightarrow T_p\omega$$

$$dp \mapsto \frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} dp = \boxed{dV_t}$$

Désigne la connexion Riemannienne

Dans la base locale, la dérivée covariante est représentée par :

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + \boxed{\Gamma}(Y)$$

Opérateur de Christoffel
Composantes $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$ = symboles de Christoffel



Seconde forme fondamentale

La partie normale de la dérivée dV_t est représentée dans la base locale par la forme bilinéaire symétrique F :

$$\bar{N}dV_t = \bar{d}x \boxed{F} Y$$

seconde forme fondamentale de la surface ω

Opérateur de courbure

$$\frac{\partial N}{\partial p} : T_p\omega \rightarrow T_p\omega$$

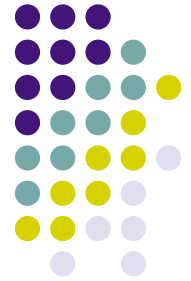
$$dp \mapsto dN = \frac{\partial N}{\partial p} dp = -\boxed{C} dp$$

Opérateur de courbure

$C = -\frac{\partial N}{\partial p}$ est un endomorphisme du plan tangent car $dN \in T_p\omega$

$$\bar{N}N = 1 \Rightarrow \bar{N}dN = 0$$

Dérivée d' un champ de vecteurs tangents



Soient $p \mapsto dp$ et $p \mapsto V_t$ deux champs de vecteurs tangents



➤ Dérivée dV_t du champs de vecteurs V_t dans la direction dp

$$dV_t = \hat{d}V_t + (\overline{dp}CV_t)N$$

➤ Application linéaire tangente associée :

$$\frac{\partial V_t}{\partial p} = \frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} + N\overline{V}_tC$$

Dérivée d'un champ de vecteurs quelconque



$p \mapsto V = V_t + v_3 N$ champ de vecteurs quelconques à support sur ω

→ $dV = dV_t + dv_3 N + v_3 dN$

➤ Application linéaire tangente associée :

$$\frac{\partial V}{\partial p} : T_p \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$dp \mapsto \frac{\partial V}{\partial p} dp = dV$$

avec

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \left[\frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p} - v_3 C \right] + N \left[\bar{V}_t C + \frac{\partial v_3}{\partial p} \right]$$

Opérateurs différentiels sur une surface



On définit de façon intrinsèque le rotationnel et la divergence d'un champ de vecteurs tangents et d'endomorphismes du plan tangent

→ Ensuite, formulaire de calcul intrinsèque....

$$\operatorname{div}(V_t) = \operatorname{Tr}\left(\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p}\right)$$

$$\operatorname{div}(\alpha V_t) = \alpha \operatorname{div}(V_t) + \overline{\operatorname{grad} \alpha} V_t$$

$$\operatorname{rot}(\Sigma V) = \operatorname{div} V$$

Rotation de $\pi/2$ autour de N

$$\operatorname{div}(I_{T_p\omega}) = 0$$

$$\operatorname{div}(\alpha I_{T_p\omega}) = \frac{\partial \alpha}{\partial p}$$

$$\operatorname{div}(AV_t) = \operatorname{div} A \cdot V_t + \operatorname{Tr}\left(A \frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p}\right)$$

ATTENTION à la définition géométrique des objets : $\overline{\operatorname{grad} \alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial p}$

Equations de Gauss-Codazzi



- Equivalent des équations de compatibilité pour les surfaces

Deux champs de tenseurs symétriques définis positifs g et C définis sur une surface ω correspondent au tenseur métrique et à l'opérateur de courbure s'ils vérifient les équations de **Gauss-Codazzi**.

L'équation de Codazzi (la plus simple) s'écrit

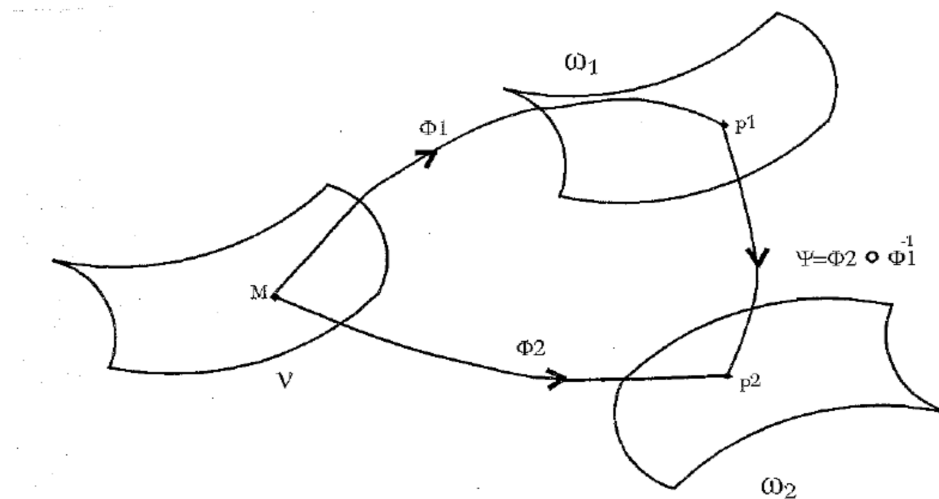
$$\text{rot}(C) = 0$$

Forme d'une surface matérielle



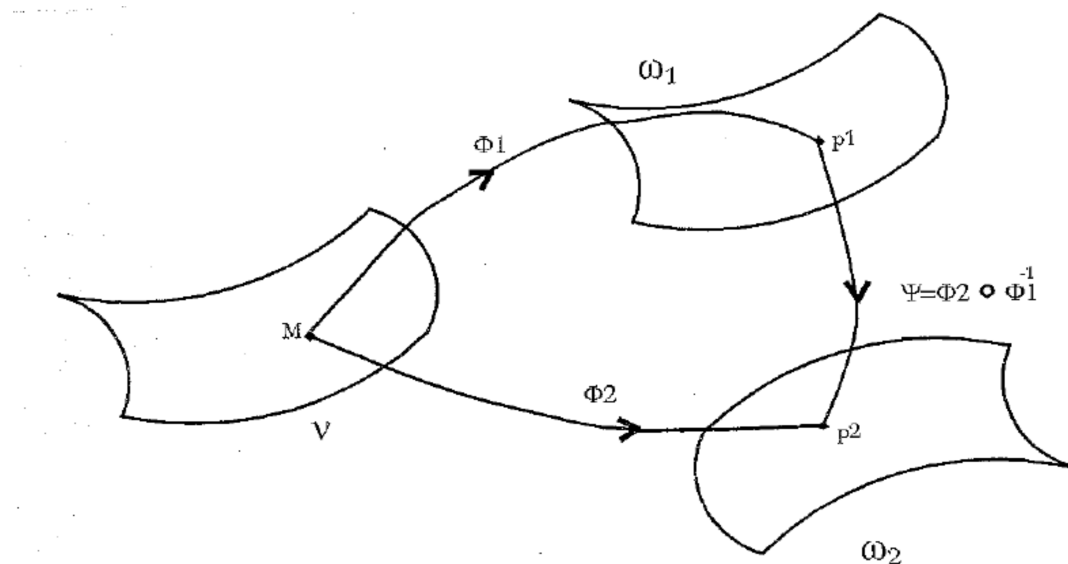
Une surface matérielle est la donnée :

- d'une variété \mathcal{V} de dimension 2 (à bord γ) plongeable dans \mathbb{R}^3 . Ses points sont les points matériels
- d'un ensemble \mathcal{C} de plongements Φ de \mathcal{V} dans \mathbb{R}^3



\mathcal{V} représente en quelque sorte la matérialité de l'objet et $\omega = \Phi(\mathcal{V})$ sa position dans l'espace physique.

Changement de configuration



Deux configurations ϕ_1 et ϕ_2 ont même forme ssi $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$

est une isométrie

Déformation d'une surface

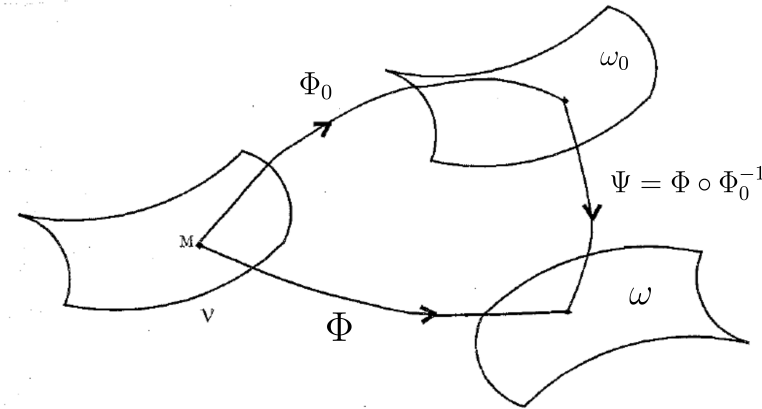


Déformation tangentielle

□ Changeur de configuration

$$\Psi = \Phi \circ \Phi_0^{-1} : \omega_0 \rightarrow \omega$$

$$p_0 \mapsto \Psi(p_0) = p$$



□ Application linéaire tangente associée

$$\frac{\partial p}{\partial p_0} = \frac{\partial \Psi}{\partial p_0}$$

□ Conformation tangentielle

$$\mathbb{G} = \overline{\frac{\partial p}{\partial p_0} \frac{\partial p}{\partial p_0}}$$

□ Déformation tangentielle

$$\Delta = \frac{1}{2}(\mathbb{G} - I_{T_{p_0}\omega_0})$$

Déformation d'une surface



Déformation des courbures

- Opérateur de courbure C_0 de la configuration initiale : endomorphisme de $T_{p_0}\omega_0$
- Opérateur de courbure C de la configuration déformée : endomorphisme de $T_p\omega$



Opèrent dans des espaces différents !

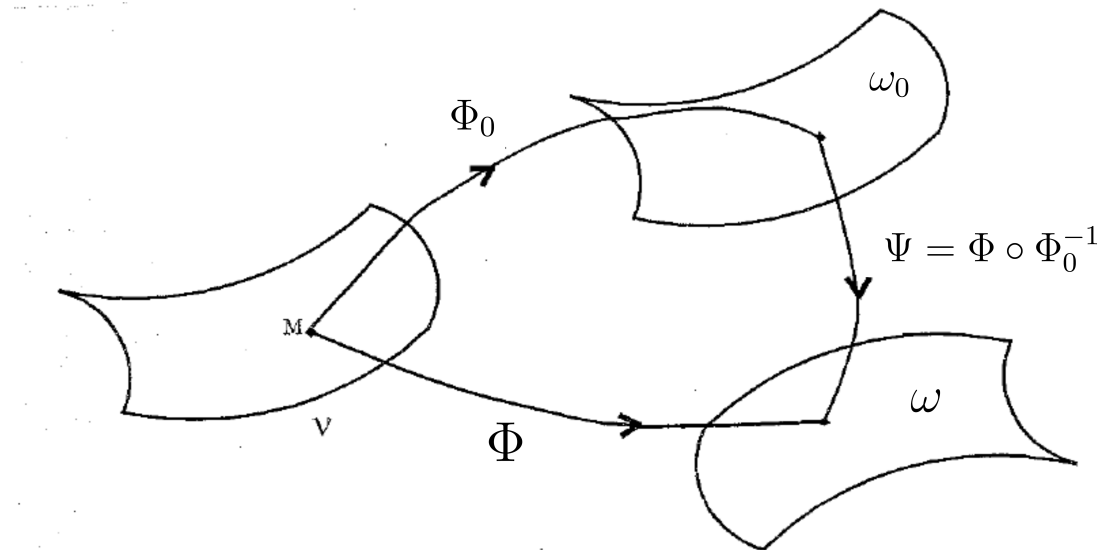
- Image réciproque de C dans la configuration initiale

$$\tilde{C} = \overline{\frac{\partial p}{\partial p_0}} C \frac{\partial p}{\partial p_0}$$

- Tenseur de variation de courbure

$$K = \tilde{C} - C_0$$

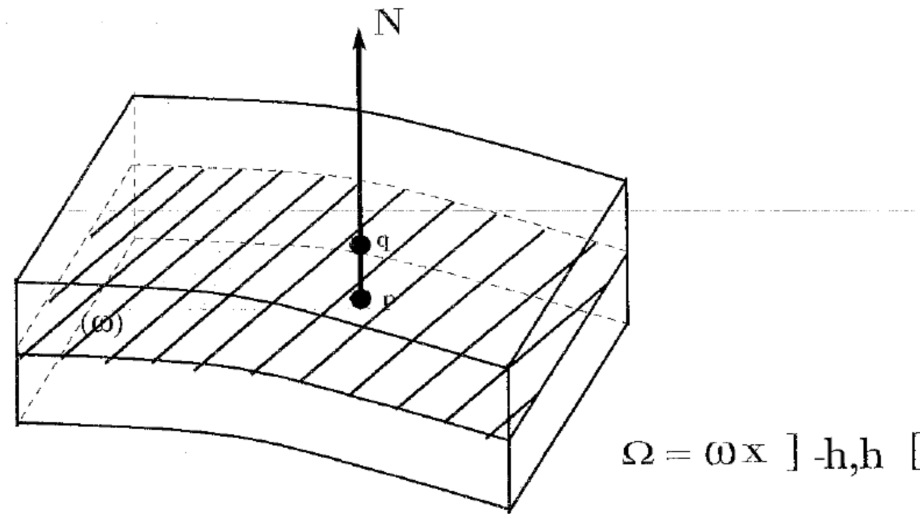
Théorème fondamental de la théorie des surfaces



Théorème

Pour que la configuration Φ ait la même forme que la configuration Φ_0 , il est nécessaire et suffisant que les champs $p_0 \mapsto \Delta$ et $p_0 \mapsto K$ soient nuls.

Application à la théorie des coques



$$\Theta : \Omega \rightarrow \omega \times]-h, h[$$

$$q \mapsto \Theta(q) = (p, z) \text{ ssi } q = p + zN$$

Coque mince \longrightarrow Θ difféomorphisme

$$\kappa = I_{T_p\omega} - zC \text{ inversible } \longrightarrow \kappa^{-1} = \left(I_{T_p\omega} - zC \right)^{-1} = I_{T_p\omega} + zC + z^2C^2 + z^3C^3 + \dots$$

Gradient et divergence d'un champ de vecteurs



Décomposition de l'application linéaire tangente $\frac{\partial V}{\partial q}$ associée à

$$q \mapsto V = V_t(p, z) + v_3(p, z)N \quad \text{dans} \quad T_p\omega \oplus \mathbb{R}N$$

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p} - v_3 C\right) \kappa^{-1} & \frac{\partial V_t}{\partial z} \\ \left(\bar{V}_t C + \frac{\partial v_3}{\partial p}\right) \kappa^{-1} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix}_{T_p\omega \oplus \mathbb{R}N}$$

→ $Div V = div(\kappa^{-1} V_t) - div(\kappa^{-1}) V_t - v_3 Tr(C \kappa^{-1}) + \frac{\partial v_3}{\partial z}$

avec $\kappa^{-1} = \left(I_{T_p\omega} - zC\right)^{-1} = I_{T_p\omega} + zC + z^2 C^2 + z^3 C^3 + \dots$

Divergence 3D - divergence 2D pour un champ d'endomorphismes



$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_t & \sigma_s \\ \bar{\sigma}_s & \sigma_n \end{pmatrix}_{T_p\omega \oplus \mathbb{R}N} \quad \longrightarrow \quad \text{Div } \sigma = (\alpha \quad \beta)$$

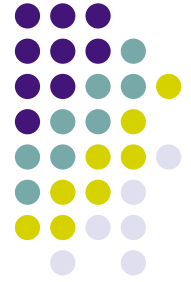
avec :

$$\begin{cases} \alpha = \text{div}(\kappa^{-1}\sigma_t) - \text{div}(\kappa^{-1})\cdot\sigma_t - \bar{\sigma}_s\kappa^{-1}C - \text{Tr}(C\kappa^{-1})\bar{\sigma}_s + \frac{\partial\sigma_s}{\partial z} \\ \beta = \text{div}(\kappa^{-1}\sigma_s) - \text{div}(\kappa^{-1})\sigma_s + \text{Tr}(\sigma_t C\kappa^{-1}) - \text{Tr}(\kappa^{-1}C)\sigma_n + \frac{\partial\sigma_n}{\partial z} \end{cases}$$

Attention : la divergence d' un champ d' endomorphismes est un champ de formes linéaires

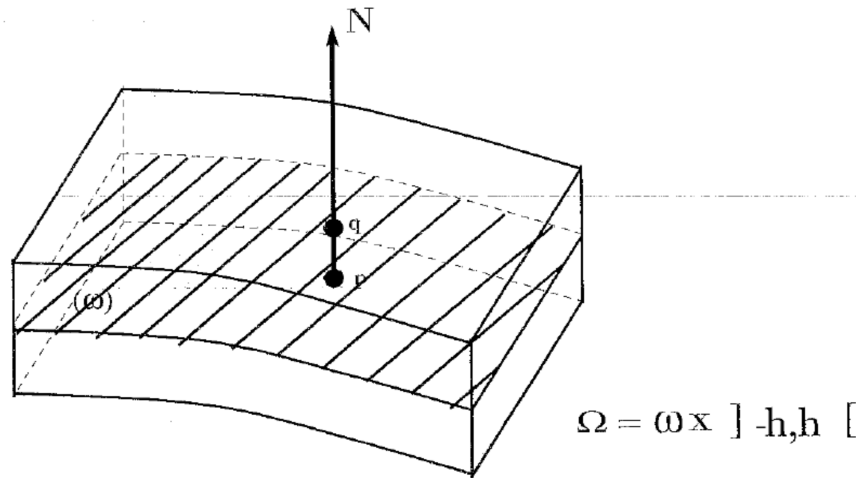
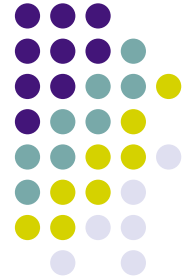
Démonstration : voir support de cours, chapitre 3

IV Les modèles classiques de coques minces élastiques



- Hypothèses cinématiques et statiques
- Etablissement des équations d'équilibre 2D de Novozhilov-Donnell
- Cas particulier des équations de membrane

Hypothèses de Kirchhoff-Love



Décomposition dans $T_p\omega \oplus \mathbb{R}N$

$$V = \Pi V + N \bar{N} V = V_t + v_3 N$$

$$V_t = V_t(p, z) \quad v_3 = V_3(p, z)$$

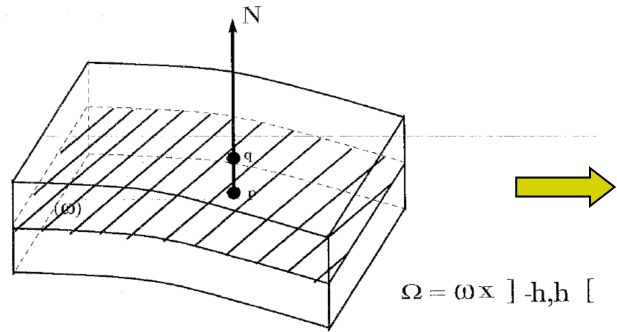
Hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love :

- pas de cisaillement
- pas de compression suivant l'épaisseur

$$\varepsilon(V) = \begin{pmatrix} \varepsilon_t(V) & \varepsilon_s(V) \\ \overline{\varepsilon_s(V)} & \varepsilon_n(V) \end{pmatrix}$$



$\varepsilon_n(V) = 0$ $\varepsilon_s(V) = 0$



$$\frac{\partial V}{\partial q} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} - v_3 C\right)\kappa^{-1} & \frac{\partial V_t}{\partial z} \\ \left(\overline{V}_t C + \frac{\partial v_3}{\partial p}\right)\kappa^{-1} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix} T_p\omega \oplus \mathbb{R}N$$



$$\varepsilon(V) = \begin{pmatrix} \varepsilon_t(V) & \varepsilon_s(V) \\ \overline{\varepsilon}_s(V) & \varepsilon_n(V) \end{pmatrix}$$

- Déformation plane

$$\varepsilon_t(V) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} \kappa^{-1} + \kappa^{-1} \frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} \right) - v_3 C \kappa^{-1}$$

- Cisaillement transverse

$$\varepsilon_s(V) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_t}{\partial z} + \kappa^{-1} \left(C V_t + \frac{\partial v_3}{\partial p} \right) \right)$$

- Déformation suivant l'épaisseur

$$\varepsilon_n(V) = \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Coque mince

$$\longrightarrow \kappa^{-1} = \left(I_{T_p\omega} - zC \right)^{-1} = I_{T_p\omega} + zC + z^2 C^2 + z^3 C^3 + \dots$$

Cinématique de Kirchhoff-Love



$$\varepsilon_n(V) = 0 \quad \longrightarrow \quad v_3 = v_3(p)$$

$$\varepsilon_s(V) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial V_t}{\partial z} + \kappa^{-1} C V_t = -\kappa^{-1} \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}}$$

Propriétés de l'opérateur $\kappa = I_{T_p\omega} - zC$

$$\frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial z} = C \kappa^{-2} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_s(V) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z} (\kappa^{-1} V_t) = -\kappa^{-2} \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}}$$

$$\kappa^{-1} + zC \kappa^{-2} = \kappa^{-2} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} V_t = \kappa \underline{V}_t(p) - z \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}} \\ v_3 = v_3(p) \end{cases}$$

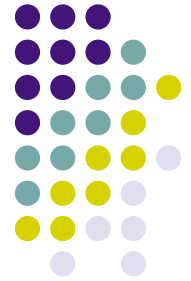
Cinématique de KL en théorie des coques

$$\begin{cases} V_t = \underline{V}_t(p) + z\Theta(p) & \text{avec } \Theta(p) = -C \underline{V}_t(p) - \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}} \\ v_3 = v_3(p) \end{cases}$$

Vecteur tourbillon transverse

□ Cas particulier des plaques pour C=0

Hypothèse de contraintes planes



Même raisonnement qu' en théorie des plaques

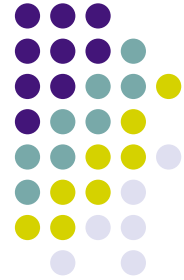
$$\longrightarrow \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{T_p\omega \oplus \mathbb{R}N}$$

Expression des contraintes planes

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \text{Tr}(\varepsilon_t) I_{T_p\omega} + 2\mu\varepsilon_t \\ &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\nu \text{Tr}(\varepsilon_t) I_{T_p\omega} + (1 - \nu)\varepsilon_t \right) \end{aligned}$$

Même contradiction entre les hypothèses cinématiques et de contraintes planes avec la loi de comportement

Les hypothèses de départ



□ Hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love

$$V_t = \underline{V}_t(p) + z\Theta(p)$$

$$v_3 = v_3(p)$$

$$\Theta(p) = -C\underline{V}_t(p) - \frac{\overline{\partial v_3}}{\partial p}$$

$$\varepsilon_t(V) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p} \kappa^{-1} + \kappa^{-1} \frac{\overline{\hat{\partial} V_t}}{\partial p} \right) - v_3 C \kappa^{-1}$$

□ Hypothèse supplémentaire de coque peu courbée ou peu profonde

$$\kappa^{-1} = I_{T_p \omega} + zC + O(z^2)$$

→ $\varepsilon_t(V) = \gamma_t(V) + z\rho_t(V)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_t(V) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p} + \frac{\overline{\hat{\partial} V_t}}{\partial p} \right) - v_3 C \quad \text{Tenseur de déformation membranaire} \\ \rho_t(V) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\partial} \Theta(p)}{\partial p} \kappa^{-1} + \frac{\overline{\hat{\partial} \Theta(p)}}{\partial p} + \frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p} C + C \frac{\overline{\hat{\partial} V_t}}{\partial p} \right) - 2v_3 C^2 \quad \text{Tenseur de variation de courbure} \end{array} \right.$$

Les hypothèses de départ



□ Hypothèses de contraintes planes

$$\sigma_t = \frac{1}{2}n_t + \frac{3}{2}x_3m_t$$

$$n_t = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}Tr(\gamma_t)I_{T_p\omega} + 4\mu\gamma_t$$

Tenseur des contraintes membranaires

$$m_t = \frac{4\lambda\mu}{3(\lambda + 2\mu)}Tr(\rho_t)I_{T_p\omega} + \frac{4}{3}\mu\rho_t$$

Tenseur des moments de flexion

□ Autre expression équivalente

$$n_t = \frac{2E}{1 - \nu^2} \left(\nu Tr(e_t)I_{T_p\omega} + (1 - \nu)e_t \right)$$

$$m_t = \frac{2E}{3(1 - \nu^2)} \left(\nu Tr(\rho_t)I_{T_p\omega} + (1 - \nu)\rho_t \right)$$

Tenseur de variation de courbure



Tenseur de variation de courbure obtenu (hypothèse de KL)

$$\rho_t(V) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\partial}\Theta(p)}{\partial p} \kappa^{-1} + \overline{\frac{\hat{\partial}\Theta(p)}{\partial p}} + \frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} C + C \overline{\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p}} \right) - 2v_3 C^2$$

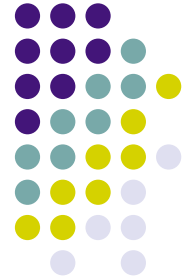
→ Correspond à l'expression générale du modèle de Koiter

Expression du tenseur de variation de courbure de Koiter en composantes :

$$\rho_{\alpha\beta}(u) = \partial_\alpha \partial_\beta u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma u_3 - b_\alpha^\gamma b_{\gamma\beta} u_3 + D_\alpha (b_\beta^\gamma u_\gamma) + b_\alpha^\gamma D_\beta u_\gamma$$

→ Intérêt du calcul intrinsèque

Equations de Novozhilov-Donnell



- Hypothèses de Kirchhoff-Love + linéarisation par rapport à C

$$\rho_t(V) = -\frac{\hat{\partial}}{\partial p} \left(\overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}} \right)$$

- Approximation de $\kappa^{-1} \simeq I_{T_p}$ dans les équations d'équilibre 3D

$$\operatorname{div} \sigma_t + \frac{\partial \overline{\sigma_s}}{\partial z} = -\bar{f}_t \quad \text{dans } \omega$$

$$\operatorname{div} \sigma_s + \operatorname{Tr}(\sigma_t C) + \frac{\partial \sigma_n}{\partial z} = -f_3 \quad \text{dans } \omega$$

- Intégration des équations d'équilibre sur l'épaisseur

Dans le plan tangent \longrightarrow $h \operatorname{div} n_t = -\bar{p}_t \quad \text{dans } \omega$

Equations de Novozhilov-Donnell



- Intégration des équations d'équilibre sur l'épaisseur

Multiplication par z et transposition de l'eq. d'équilibre dans le plan tangent
+ utilisation de l'équation suivant N

$$h^3 \operatorname{div}(\overline{\operatorname{div} m_t}) + h \operatorname{Tr}(n_t C) = -p_3 - \operatorname{div} M_t$$

- Equation d'équilibre de Novozhilov-Donnell

$$h \operatorname{div} n_t = -\bar{p}_t$$

$$h^3 \operatorname{div}(\overline{\operatorname{div} m_t}) + h \operatorname{Tr}(n_t C) = -p_3 - \operatorname{div} M_t$$

- Conditions aux limites

$$V_t = 0 \quad v_3 = \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}} = 0$$

Equations de membrane



- Obtenues pour de très faibles épaisseurs h

Equations de Novozhilov-Donnell pour $h^3 \ll h$



$$\begin{cases} h \operatorname{div} n_t & = -\bar{p}_t & \text{dans } \omega \\ h \operatorname{Tr}(n_t C) & = -p_3 & \text{dans } \omega \end{cases}$$

- Conditions aux limites

$$V_t = 0$$

Conclusions



- Modèles basés sur des hypothèses *a priori* contradictoires
 - Domaines de validité des modèles obtenus (Novozhilov-Donnell, membrane ...) ?
 - Choix du modèle à utiliser en fonction des données du problème ?
 - Puissance du calcul intrinsèque
- Classification des modèles asymptotiques de structures minces en fonction de leur domaine de validité