Écoulement dans un canal aux parois déformées

– Canal bidimensionnel avec déformations des parois

– Analyse de Smith. Équivalent de la triple couche en écoulement de canal

– Analyse régulière de Mauss dans le plan (α, β)

– Modèle de couche limite interactive

– Extension avec courbure du canal

Analyse de F.T. Smith

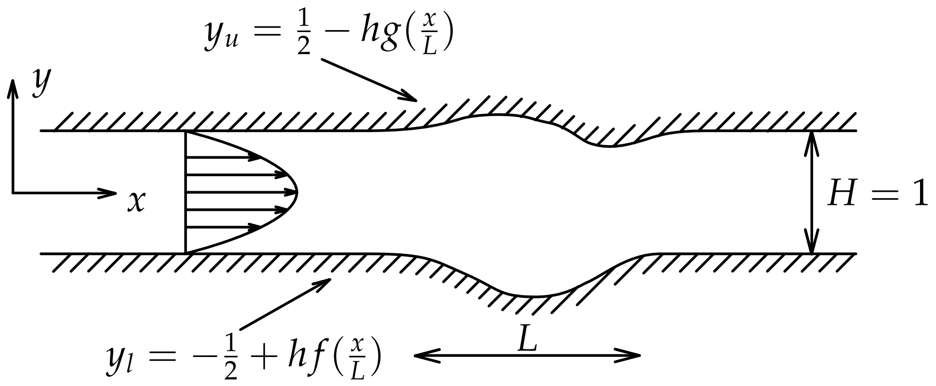


FIGURE 29 – *Analyse asymptotique régulière de l'écoulement dans un canal avec des parois déformées*

Écoulement de base : Poiseuille

$$u_0 = \frac{1}{4} - y^2$$

Déformation

$$\text{hauteur} \quad h = \varepsilon$$
$$\text{longueur} \quad L = \varepsilon^{-\alpha} \quad ; \quad \alpha > 0$$

$$\boxed{\varepsilon = R^{-1/(\alpha+3)} \quad ; \quad R = \frac{u_0 H^*}{\nu}}$$

$$L = R^{\alpha/(\alpha+3)} \quad ; \quad h = R^{-1/(\alpha+3)} \quad ; \quad \frac{h}{L} = R^{-(\alpha+1)/(\alpha+3)}$$

Deux cas importants

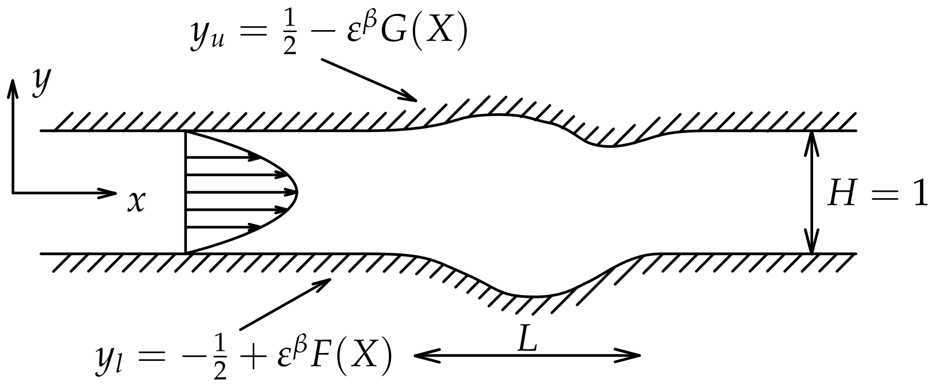
- $\alpha > \dfrac{1}{2}$ donc $R^{-1} \prec \dfrac{h}{L} \prec R^{-3/7}$

pression constante dans une section, décollement possible, pas d'influence amont

- $\alpha = \dfrac{1}{2} \quad ; \quad L = R^{1/7} \quad ; \quad h = R^{-2/7} \quad ; \quad \dfrac{h}{L} = R^{-3/7}$

décollement possible, influence amont d'étendue $R^{1/7}$

Analyse régulière détaillée



Étendue longitudinale de la déformation

$$\boxed{X = x\varepsilon^\alpha}$$

Petit paramètre

$$\boxed{\varepsilon = R^{-1/m}}$$

Contraintes

- problème de perturbation singulière si $\alpha < m$

- problème de couche limite si pente de la bosse telle que $\beta + \alpha > 0$

- termes visqueux et inertiels du même ordre si $3\beta = m - \alpha$

- épaisseur de couche limite = ε^β

dans la couche limite $u_0 = O(\varepsilon^\beta)$

décollement possible si la vitesse est d'ordre ε^β

Développements réguliers

- Dans la couche limite

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \varepsilon^{(m-\alpha)/3} U_1(X,Y) \\ \mathcal{V} &= \varepsilon^{(2m+\alpha)/3} V_1(X,Y) \qquad Y = (y+1/2)/\varepsilon^{\beta} \\ \mathcal{P} - p_c &= \varepsilon^{(2m-2\alpha)/3} P_1(X,Y) \end{aligned}$$

- Dans le cœur

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= u_0(y) + \varepsilon^{r} u_1(X,y) \\ \mathcal{V} &= \varepsilon^{r+\alpha} v_1(X,y) \\ \mathcal{P} - p_c &= -2\varepsilon^{m-\alpha} X + \varepsilon^{(2m-2\alpha)/3} p_1(X,y) \end{aligned}$$

Raccord sur la pression assuré.

Équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial V_1}{\partial Y} &= 0 \\ U_1 \frac{\partial U_1}{\partial X} + V_1 \frac{\partial U_1}{\partial Y} &= -\frac{\partial P_1}{\partial X} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial P_1}{\partial Y} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial X} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0 \\ u_0 \frac{\partial u_1}{\partial X} + v_1 \frac{\mathrm{d} u_0}{\mathrm{d} y} &= -\varepsilon^{2(m-\alpha)/3-r} \frac{\partial p_1}{\partial X} \\ u_0 \frac{\partial v_1}{\partial X} &= -\varepsilon^{2(m-4\alpha)/3-r} \frac{\partial p_1}{\partial y} \end{aligned}$$

Cas significatifs

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial X} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0 \\
u_0 \frac{\partial u_1}{\partial X} + v_1 \frac{\mathrm{d} u_0}{\mathrm{d} y} &= -\varepsilon^{2(m-\alpha)/3 - r} \frac{\partial p_1}{\partial X} \\
u_0 \frac{\partial v_1}{\partial X} &= -\varepsilon^{2(m-4\alpha)/3 - r} \frac{\partial p_1}{\partial y}
\end{aligned}
$$

• Si $r < \dfrac{2(m-\alpha)}{3}$ solution non triviale dans le cœur

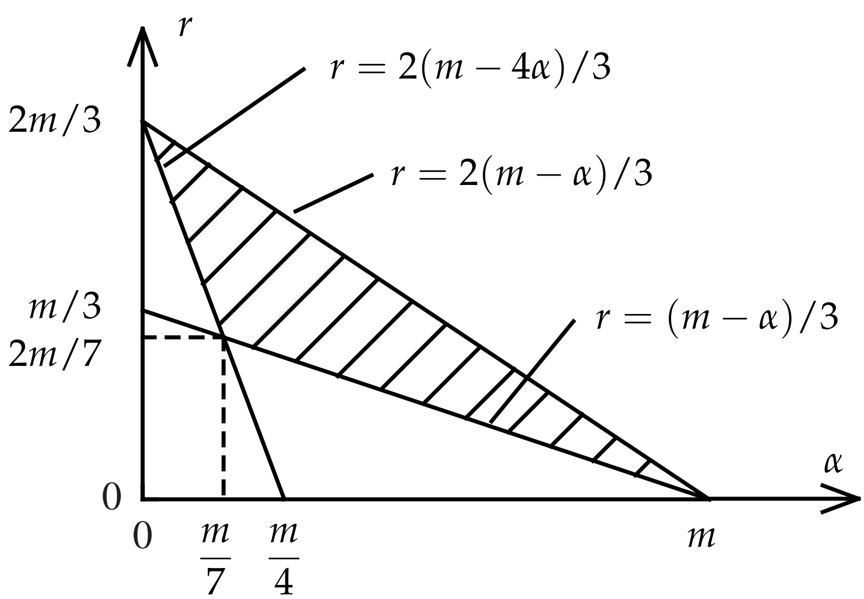
$$
u_1 = A(X) \frac{\mathrm{d} u_0}{\mathrm{d} y} \quad ; \quad v_1 = -\frac{\mathrm{d} A}{\mathrm{d} X} u_0
$$

• Si $r = \dfrac{2(m-4\alpha)}{3}$

$$
u_0 \frac{\partial v_1}{\partial X} = -\frac{\partial p_1}{\partial y}
$$

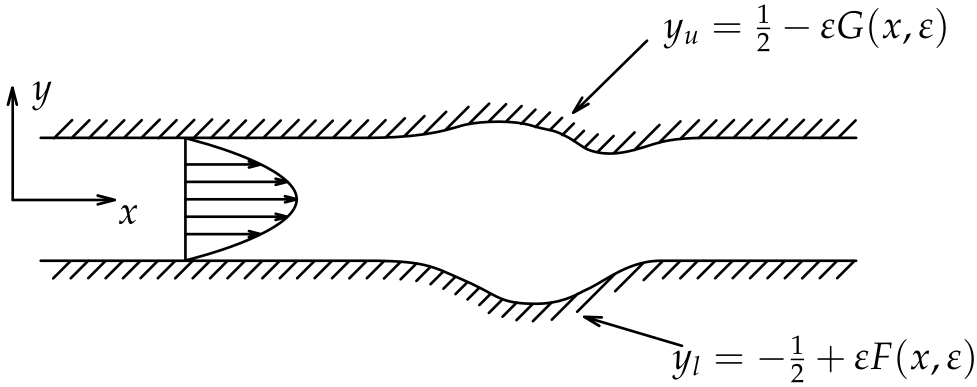
$$
p_1(X,y) = P_1(X) + \frac{A''(X)}{60} \left(12y^5 - 10y^3 + \frac{15}{4} y + 1 \right)
$$

• Si $r < \dfrac{m-\alpha}{3}$ alors $A = 0$ (raccord sur u).



Point significatif $\quad \alpha = \dfrac{m}{7} \quad ; \quad \beta = \dfrac{2m}{7}$

Couche limite interactive



Épaisseur de couche limite = ε

Approximation dans le cœur

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= u_0(y) + \varepsilon^r u(x, y, \varepsilon) \\
\mathcal{V} &= \varepsilon^r v(x, y, \varepsilon) \\
\mathcal{P} - p_c &= -\frac{2x}{\mathcal{R}} + \varepsilon^s p(x, y, \varepsilon)
\end{aligned}$$

Équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\varepsilon^r \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}y} &= -\varepsilon^{s-r} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
\varepsilon^r \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} &= -\varepsilon^{s-r} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

Nécessairement, $s \geq r$. Avec des développements généralisés, on peut prendre $s = r$.

$$
\begin{aligned}
u &= u_1(x, y, \varepsilon) + \cdots \\
v &= v_1(x, y, \varepsilon) + \cdots \\
p &= p_1(x, y, \varepsilon) + \cdots
\end{aligned}
$$

Équations dans le cœur si on néglige les termes d'ordre $\mathrm{O}(\varepsilon^r, \dfrac{1}{R})$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0 \\
u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\mathrm{d} u_0}{\mathrm{d} y} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} \\
u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} &= -\frac{\partial p_1}{\partial y}
\end{aligned}
$$

Solution au voisinage de la paroi $y = -1/2$

$$
\begin{aligned}
u_1 &= -2 p_{10} \ln\left(\frac{1}{2} + y\right) + c_{10} + \cdots \\
v_1 &= -p_{10x} + 2 p_{10x} \left(\frac{1}{2} + y\right) \ln\left(\frac{1}{2} + y\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} + y\right) (2 p_{10x} + c_{10x}) + \cdots \\
p_1 &= p_{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + y\right)^2 p_{10xx} + \cdots
\end{aligned}
$$

Présence de termes logarithmiques, mais pas de problème avec la MASC.

Différentes approximations pour le cœur

Modèle non linéaire

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0 \\
\varepsilon \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\mathrm{d} u_0}{\mathrm{d} y} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} \\
\varepsilon \left(u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} &= -\frac{\partial p_1}{\partial y}
\end{aligned}$$

Modèle linéaire

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0 \\
u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\mathrm{d} u_0}{\mathrm{d} y} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} \\
u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} &= -\frac{\partial p_1}{\partial y}
\end{aligned}$$

Modèle simplifié (déformations longues)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0 \\
u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\mathrm{d} u_0}{\mathrm{d} y} &= 0 \\
u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} &= -\frac{\partial p_1}{\partial y}
\end{aligned}$$

Approximation uniformément valable

Variables de couche limite

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\frac{1}{2}+y}{\varepsilon} \\ \widehat{Y} &= \frac{\frac{1}{2}-y}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Dans la couche limite, $u_0 = \mathrm{O}(\varepsilon)$ d'où $r = 1$ de sorte que $u_0 + \varepsilon u$ peut être négatif

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= u_0(y) + \varepsilon u(x,y,\varepsilon) \\ \mathcal{V} &= \varepsilon v(x,y,\varepsilon) \\ \mathcal{P} - p_c &= -\frac{2x}{\mathcal{R}} + \varepsilon p(x,y,\varepsilon) \end{aligned}$$

Approximation uniformément valable

$$\begin{aligned} u &= U_1(x,Y,\varepsilon) + \widehat{U}_1(x,\widehat{Y},\varepsilon) + u_1(x,y,\varepsilon) \\ v &= \varepsilon V_1(x,Y,\varepsilon) - \varepsilon\widehat{V}_1(x,\widehat{Y},\varepsilon) + v_1(x,y,\varepsilon) \\ p &= \Delta(\varepsilon)P_1(x,Y,\varepsilon) + \Delta(\varepsilon)\widehat{P}_1(x,\widehat{Y},\varepsilon) + p_1(x,y,\varepsilon) \end{aligned}$$

Conditions aux limites

$$Y \to \infty \ : \ U_1 \to 0 \ , \ V_1 \to 0$$

$$\widehat{Y} \to \infty \ : \ \widehat{U}_1 \to 0 \ , \ \widehat{V}_1 \to 0$$

Le long des parois

$$Y = F(x,\varepsilon) \ : \ u_0 + \varepsilon u = 0 \ , \ v = 0$$

$$\widehat{Y} = G(x,\varepsilon) \ : \ u_0 + \varepsilon u = 0 \ , \ v = 0$$

soit

$$Y = F(x,\varepsilon) \ : \ u_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon u_1 = 0 \ , \ \varepsilon V_1 + v_1 = 0$$

$$\widehat{Y} = G(x,\varepsilon) \ : \ u_0 + \varepsilon\widehat{U}_1 + \varepsilon u_1 = 0 \ , \ -\varepsilon\widehat{V}_1 + v_1 = 0$$

Modèle de couche limite interactive

Équations du cœur, seuls les termes $O\left(\frac{1}{R}\right)$ sont négligés

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= u_0(y) + \varepsilon u_1(x,y,\varepsilon) \\
\mathcal{V} &= \varepsilon v_1(x,y,\varepsilon) \\
\mathcal{P} - p_c &= -\frac{2x}{\mathcal{R}} + \varepsilon p_1(x,y,\varepsilon)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0 \\
\varepsilon\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + u_0\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}y} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} \\
\varepsilon\left(u_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + u_0\frac{\partial v_1}{\partial x} &= -\frac{\partial p_1}{\partial y}
\end{aligned}
$$

Équations de couche limite généralisées

$$
\begin{aligned}
u &= U_1(x,Y,\varepsilon) + \widehat{U}_1(x,\widehat{Y},\varepsilon) + u_1(x,y,\varepsilon) \\
v &= \varepsilon V_1(x,Y,\varepsilon) - \varepsilon\widehat{V}_1(x,\widehat{Y},\varepsilon) + v_1(x,y,\varepsilon) \\
p &= \Delta(\varepsilon)P_1(x,Y,\varepsilon) + \Delta(\varepsilon)\widehat{P}_1(x,\widehat{Y},\varepsilon) + p_1(x,y,\varepsilon)
\end{aligned}
$$

D'après l'équation de quantité de mouvement suivant y

$$\boxed{\Delta = \varepsilon^3}$$

Termes visqueux et inertiels du même ordre

$$\boxed{\varepsilon = R^{-1/3}}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\varepsilon\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + u_0\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}y} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{\mathcal{R}}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

Autre forme du modèle

On pose

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= u_0 + \varepsilon u \\ \tilde{v} &= \varepsilon v \\ \tilde{p}_1 &= -\frac{2x}{\mathcal{R}} + \varepsilon p_1 + p_c\end{aligned}$$

Équations de couche limite généralisées

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} &= 0 \\ \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} &= -\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} + \frac{1}{\mathcal{R}}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}\end{aligned}$$

+ équations du cœur

Conditions aux parois

$$\tilde{u} = 0 \quad ; \quad \tilde{v} = 0$$

+conditions de compatibilité entre la solution du cœur et la solution des équations de couche limite généralisées.

Modèle simplifié pour le cœur

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\tilde{u}_1 - u_0)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y} &= 0 \\
u_0 \frac{\partial(\tilde{u}_1 - u_0)}{\partial x} + \tilde{v}_1 \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}y} &= 0 \\
u_0 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{p}_1 + \frac{2x}{\mathcal{R}}\right)
\end{aligned}
$$

Solution

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_1 - u_0 &= \widetilde{A}(x) \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}y} \\
\tilde{v}_1 &= -\frac{\mathrm{d}\widetilde{A}}{\mathrm{d}x} u_0 \\
\tilde{p}_1 + \frac{2x}{\mathcal{R}} &= \widetilde{B}(x) + \frac{\mathrm{d}^2\widetilde{A}}{\mathrm{d}x^2} \int_0^y u_0^2(\eta)\, \mathrm{d}\eta
\end{aligned}
$$

Modèle très avantageux numériquement

Méthode numérique

On pose

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= u_0 + \varepsilon u \\ \tilde{v} &= \varepsilon v \\ \tilde{p}_1 &= -\frac{2x}{\mathcal{R}} + \varepsilon p_1 + p_c\end{aligned}$$

Équations de couche limite généralisées

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} &= 0 \\ \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} &= -\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} + \frac{1}{\mathcal{R}}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Équations du cœur (modèle non linéaire)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y} &= 0 \\ \tilde{u}_1\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + \tilde{v}_1\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial y} &= -\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} + \frac{1}{\mathcal{R}}\frac{\mathrm{d}^2 u_0}{\mathrm{d}y^2} \\ \tilde{u}_1\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} + \tilde{v}_1\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y} &= -\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial y}\end{aligned}$$

Conditions aux limites

$$\text{paroi} \quad : \quad \tilde{u} = 0 \quad ; \quad \tilde{v} = 0$$

Conditions de raccord

Conditions de raccord

Équations de continuité

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y} &= 0\\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{u}-\tilde{u}_1)+\frac{\partial}{\partial y}(\tilde{v}-\tilde{v}_1)=0$$

Le long d'une ligne (arbitraire) $y = y_C$, on impose

$$\tilde{v}(y_c)=\tilde{v}_1(y_c)$$

d'où les conditions à imposer pour les équations du cœur

$$\begin{aligned}\text{paroi inférieure} \;:\; \tilde{v}_1(y_l) &= -\int_{y_l}^{y_c}\frac{\partial(\tilde{u}-\tilde{u}_1)}{\partial x}\,\mathrm{d}y\\ \text{paroi supérieure} \;:\; \tilde{v}_1(y_u) &= -\int_{y_u}^{y_c}\frac{\partial(\tilde{u}-\tilde{u}_1)}{\partial x}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Méthode simplifiée pour la pression : technique numérique

On a posé

$$
\begin{aligned}
\tilde{u} &= u_0 + \varepsilon u \\
\tilde{v} &= \varepsilon v \\
\tilde{p}_1 &= -\frac{2x}{\mathcal{R}} + \varepsilon p_1 + p_c
\end{aligned}
$$

Solution dans le cœur

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_1 - u_0 &= \widetilde{A}(x)\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}y} \\
\tilde{v}_1 &= -\frac{\mathrm{d}\widetilde{A}}{\mathrm{d}x}u_0 \\
\tilde{p}_1 + \frac{2x}{\mathcal{R}} &= \widetilde{B}(x) + \frac{\mathrm{d}^2\widetilde{A}}{\mathrm{d}x^2}\int_0^y u_0^2(\eta)\,\mathrm{d}\eta
\end{aligned}
$$

$\widetilde{B}(x)$ est ajusté à chaque pas pour respecter la conservation du débit dans le canal.

Calcul de $\widetilde{A}$

Avec $\tilde{v}(y_\ell) = 0$, l'équation de continuité donne

$$
\tilde{v}(y_c) = -\int_{y_\ell}^{y_c}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\,\mathrm{d}y
$$

On impose $\tilde{v}_1(y_c) = \tilde{v}(y_c)$ d'où

$$
\tilde{v}_1(y_c) = -\int_{y_\ell}^{y_c}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\,\mathrm{d}y
$$

Or

$$
\tilde{v}_1 = -\frac{\mathrm{d}\widetilde{A}}{\mathrm{d}x}u_0
$$

d'où

$$
\boxed{\frac{\mathrm{d}\widetilde{A}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u_0(y_c)}\int_{y_\ell}^{y_c}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\,\mathrm{d}y}
$$

Cas I

$$L = L_0 \left[\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_0}\right]^{1/7} \quad , \quad h = h_0 \left[\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_0}\right]^{-2/7}$$

$$L_0 = 2.236 \qquad , \; h_0 = -0.5$$

Cas II

$$L = L_0 \left[\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_0}\right]^{1/4} \quad , \quad h = h_0 \left[\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_0}\right]^{-1/4}$$

$$L_0 = 2.236 \qquad , \; h_0 = -0.5$$

Cas III

$$L = L_0 \left[\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_0}\right]^{1/7} \quad , \quad h = h_0 \left[\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_0}\right]^{-2/7}$$

$$L_0 = 0.707 \qquad , \; h_0 = -0.57$$

Cas IV

$$L = L_0 \left[\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_0}\right]^{1/4} \quad , \quad h = h_0 \left[\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_0}\right]^{-1/4}$$

$$L_0 = 0.707 \qquad , \; h_0 = -0.57$$

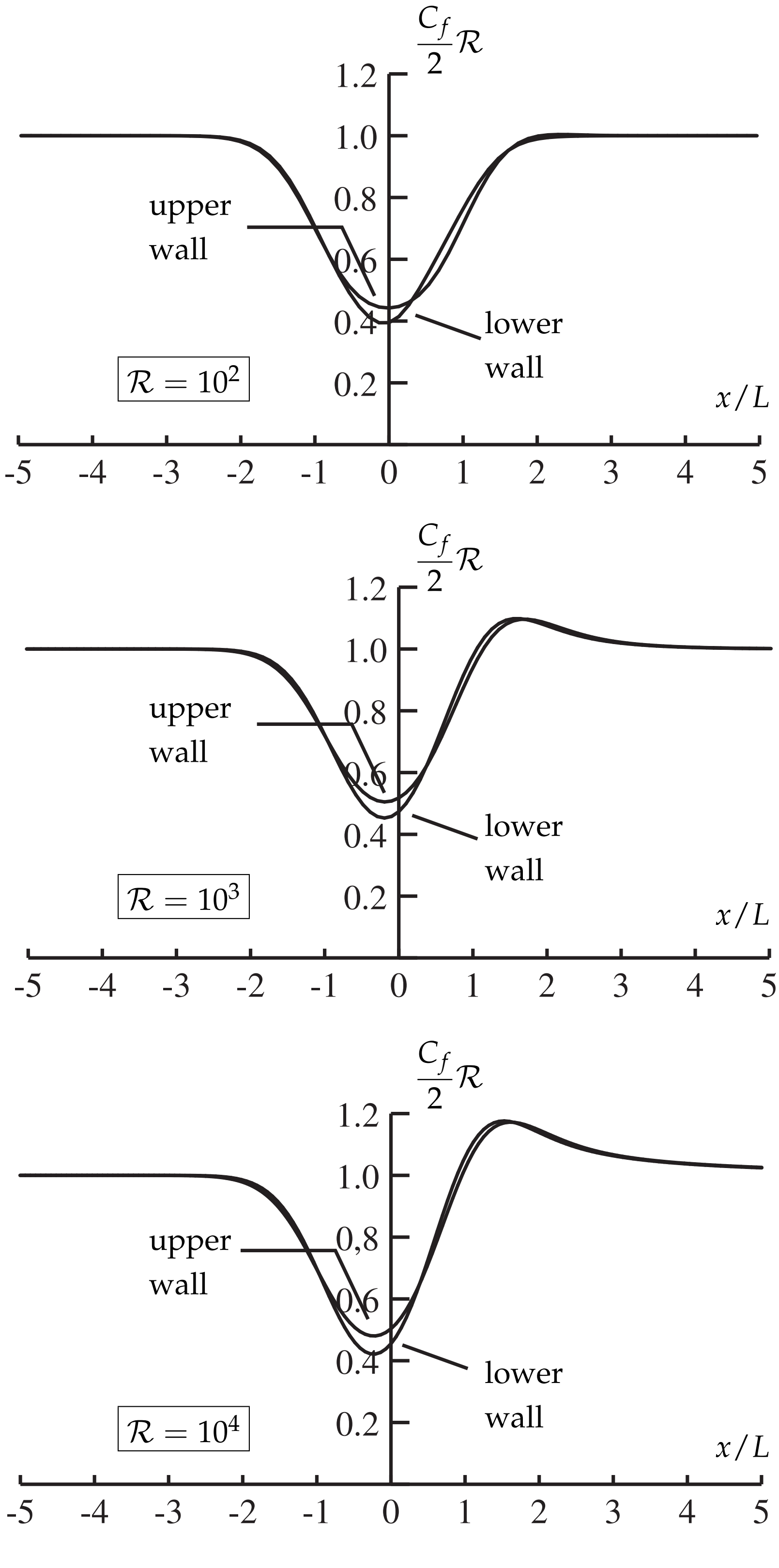


FIGURE 30 – *Cas I*

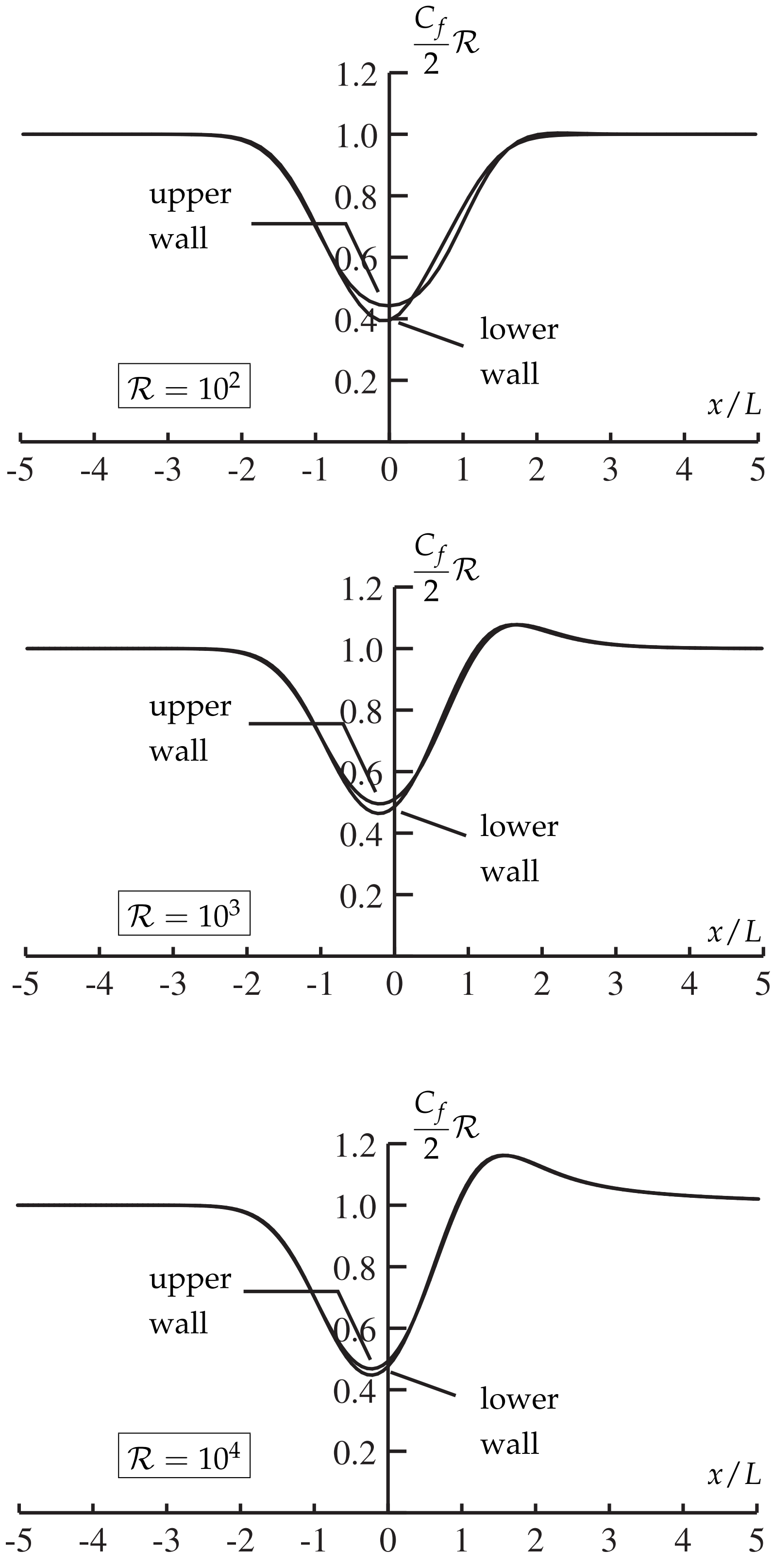


FIGURE 31 – *Cas II*

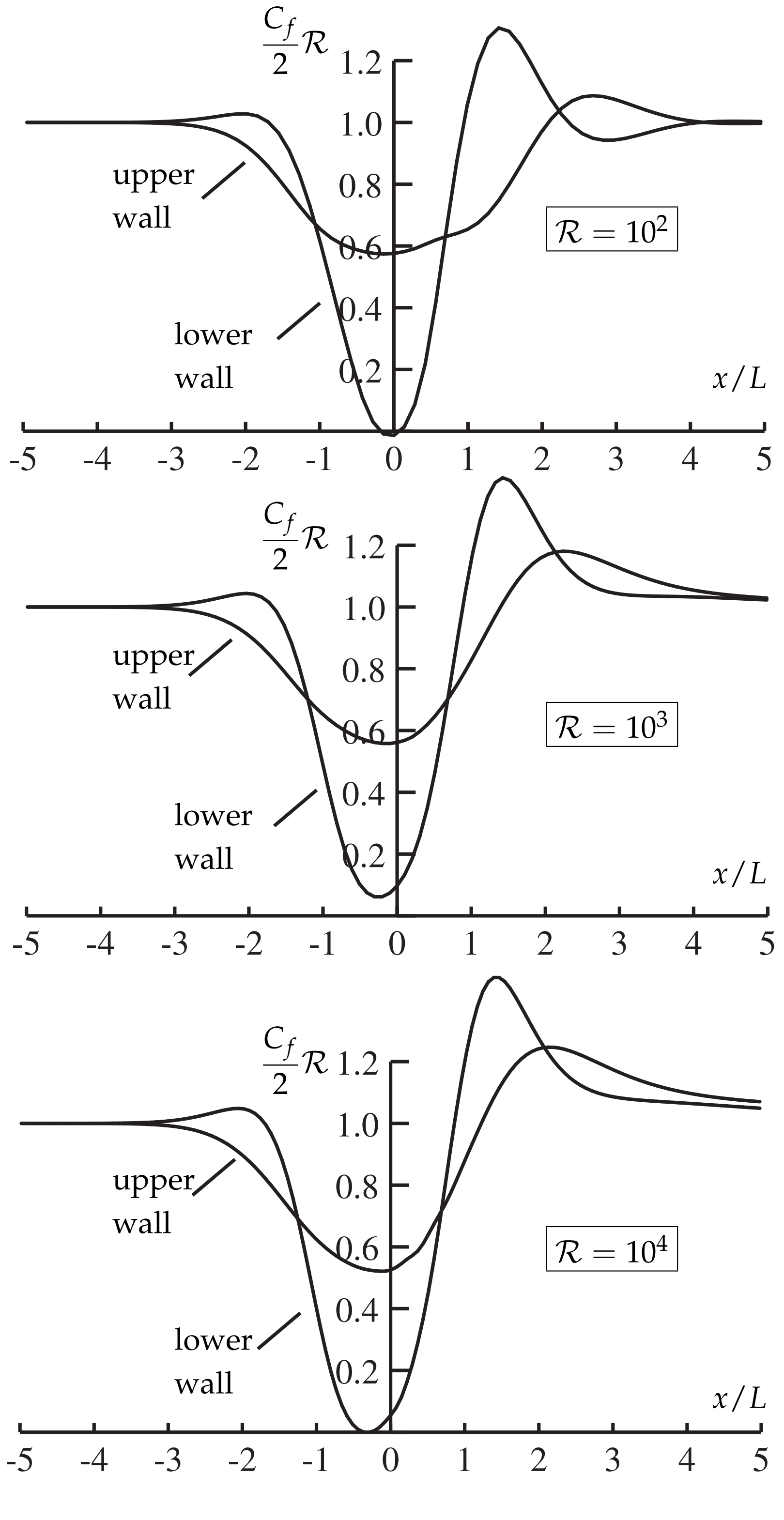


FIGURE 32 – *Cas III*

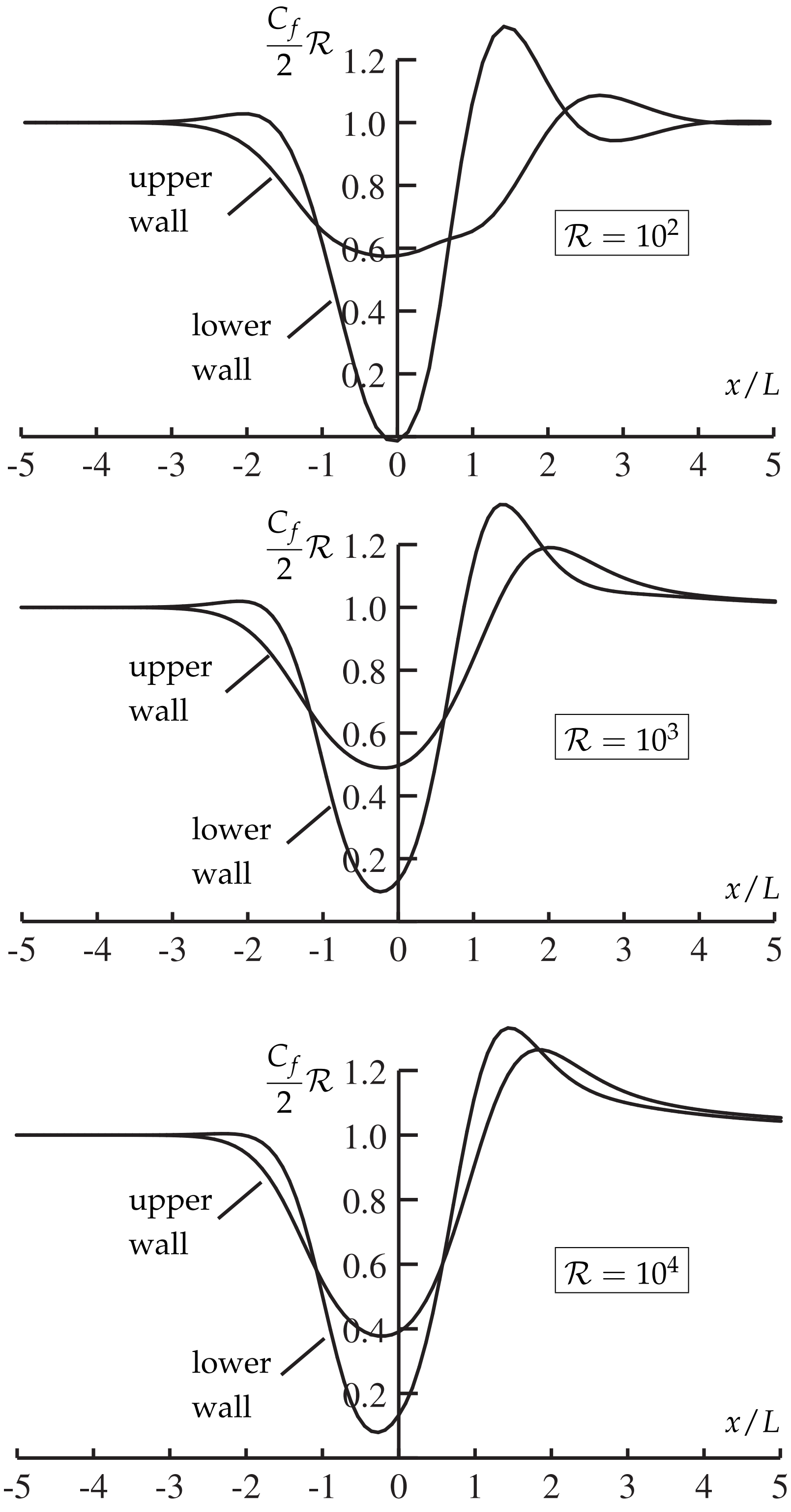


FIGURE 33 – *Cas IV*

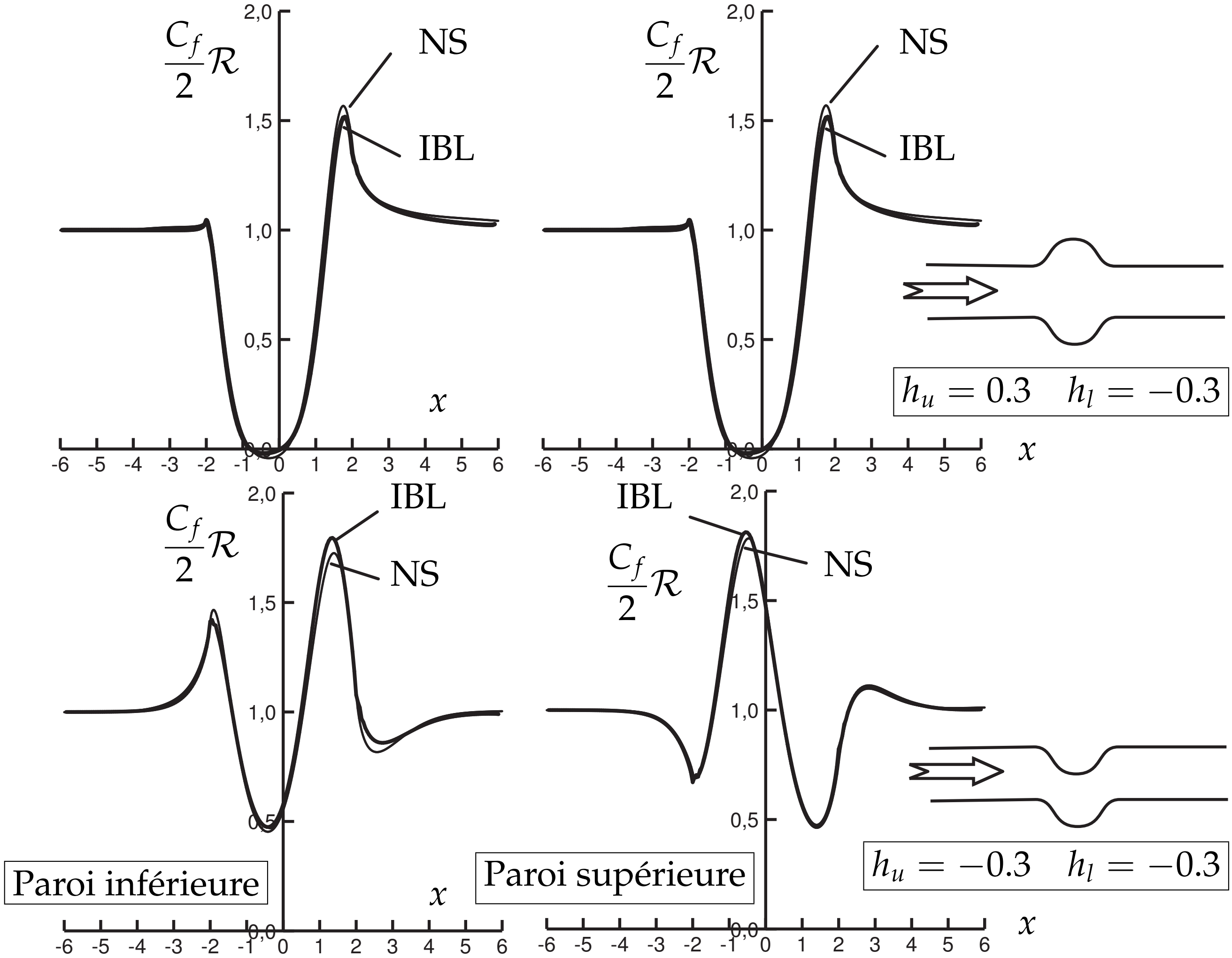


FIGURE 34 – *Déformations symétrique et antisymétrique des parois.* $\mathcal{R} = 1000$.
NS = Navier-Stokes, IBL = Couche limite interactive

Déformation des parois

$$\text{Paroi inférieure} \quad F = \frac{h_l}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$\text{Paroi supérieure} \quad G = -\frac{h_u}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$-2 \le x \le 2 \qquad L = 4$$

Écoulement produit par un coude

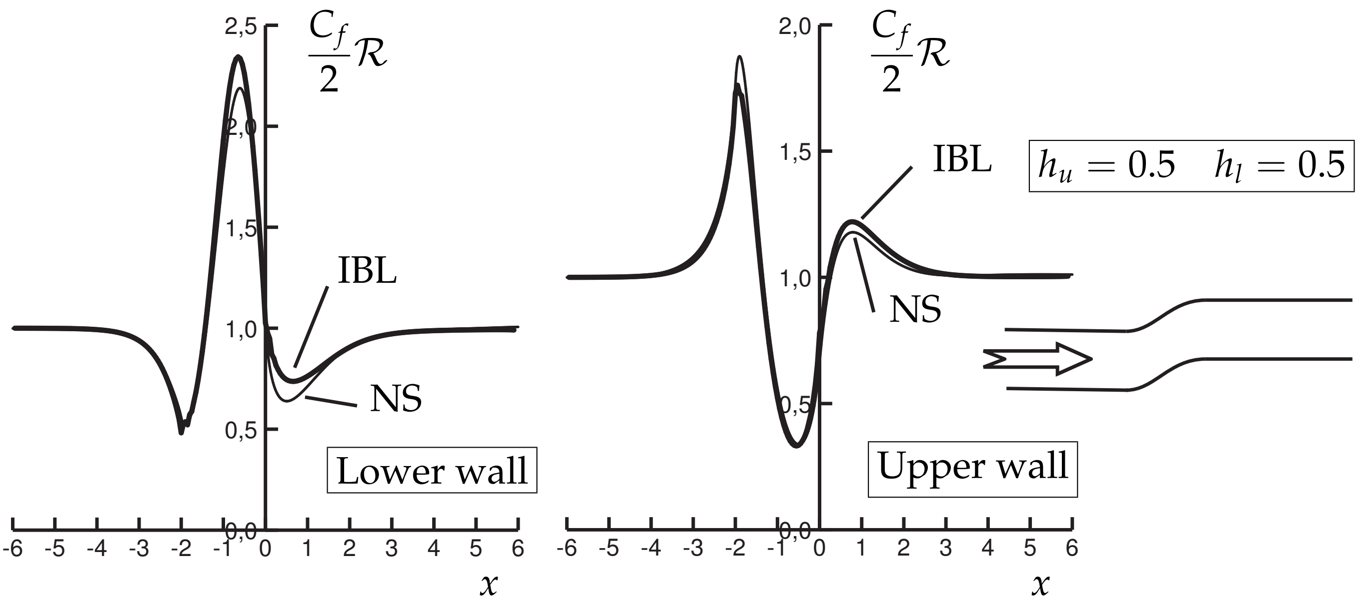


FIGURE 35 – *Écoulement produit par un coude.* $\mathcal{R} = 1000$. *NS = Navier-Stokes , IBL = Couche limite interactive*

Déformation des parois

$$\text{Paroi inférieure} \quad F = \frac{h_l}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$\text{Paroi supérieure} \quad G = -\frac{h_u}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$-2 \leq x \leq 2 \qquad L = 4$$

Élargissement - Rétrécissement

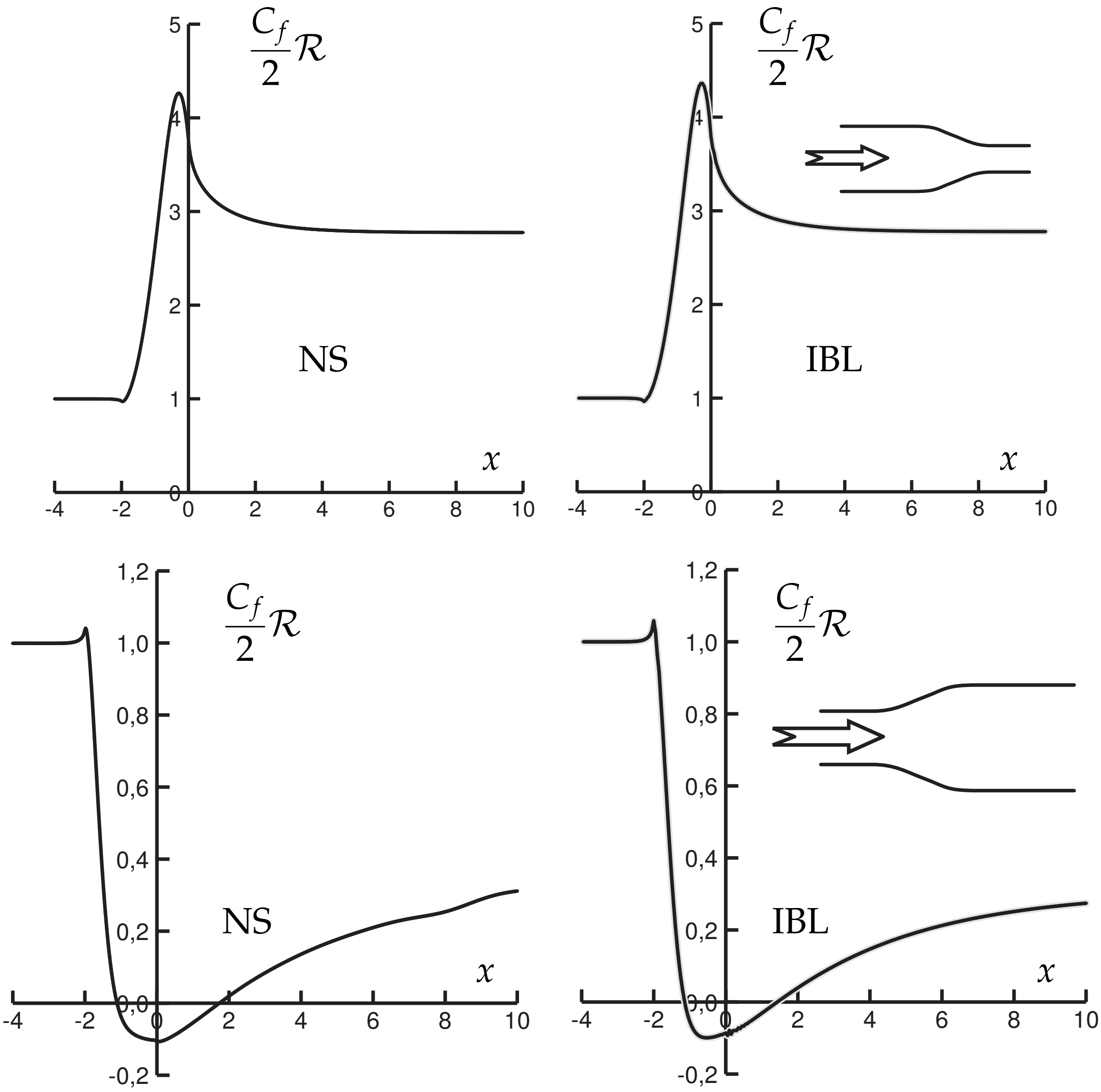


FIGURE 36 – *Contraction et élargissement.* $\mathcal{R} = 1000$.

$$\text{Paroi inférieure} \quad F = \frac{h_l}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi x}{L}\right)$$
$$\text{Paroi supérieure} \quad G = -\frac{h_u}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi x}{L}\right)$$
$$-2 \leq x \leq 0 \qquad L = 4$$

Contraction : $h_l = 0,2\ h_u = -0,2$

Élargissement $h_l = -0,4\ h_u = 0,4$

Écoulement dans un coude

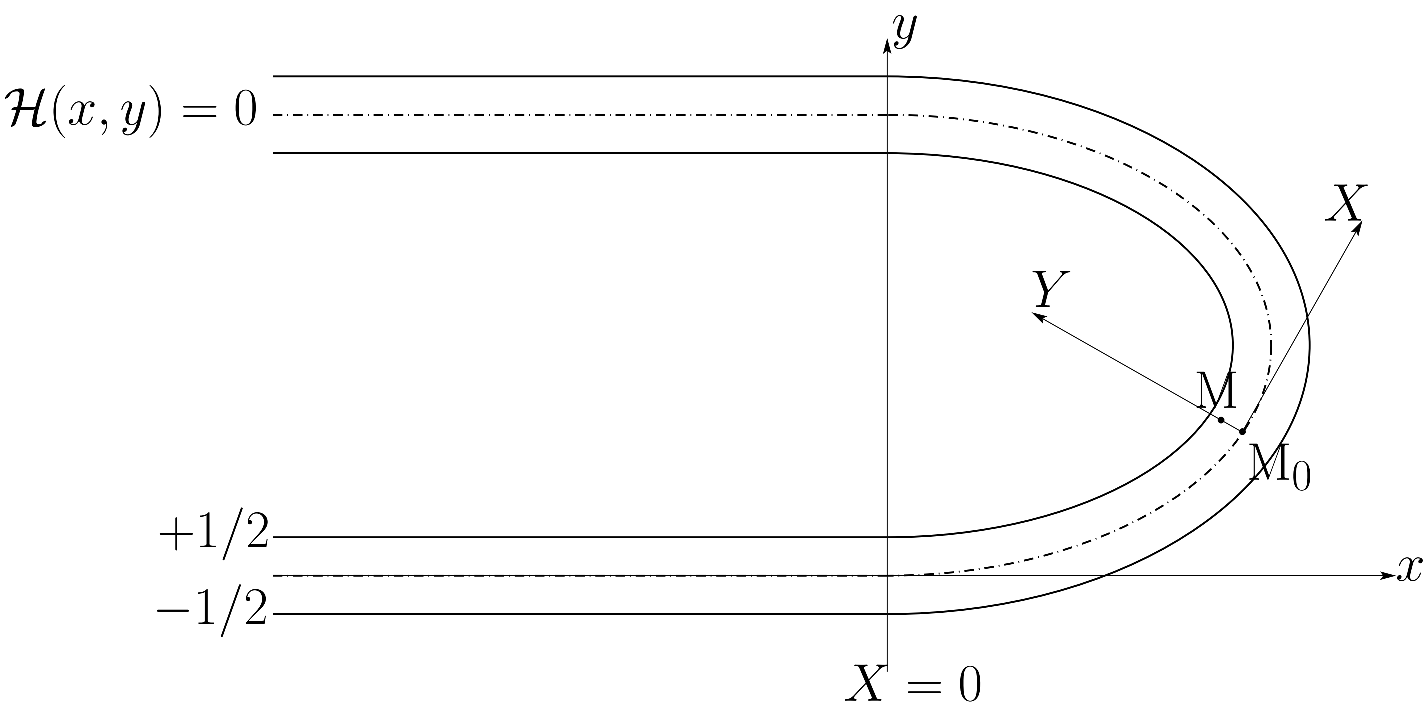


FIGURE 37 – *Géométrie de la conduite*

Écoulement dans un coude

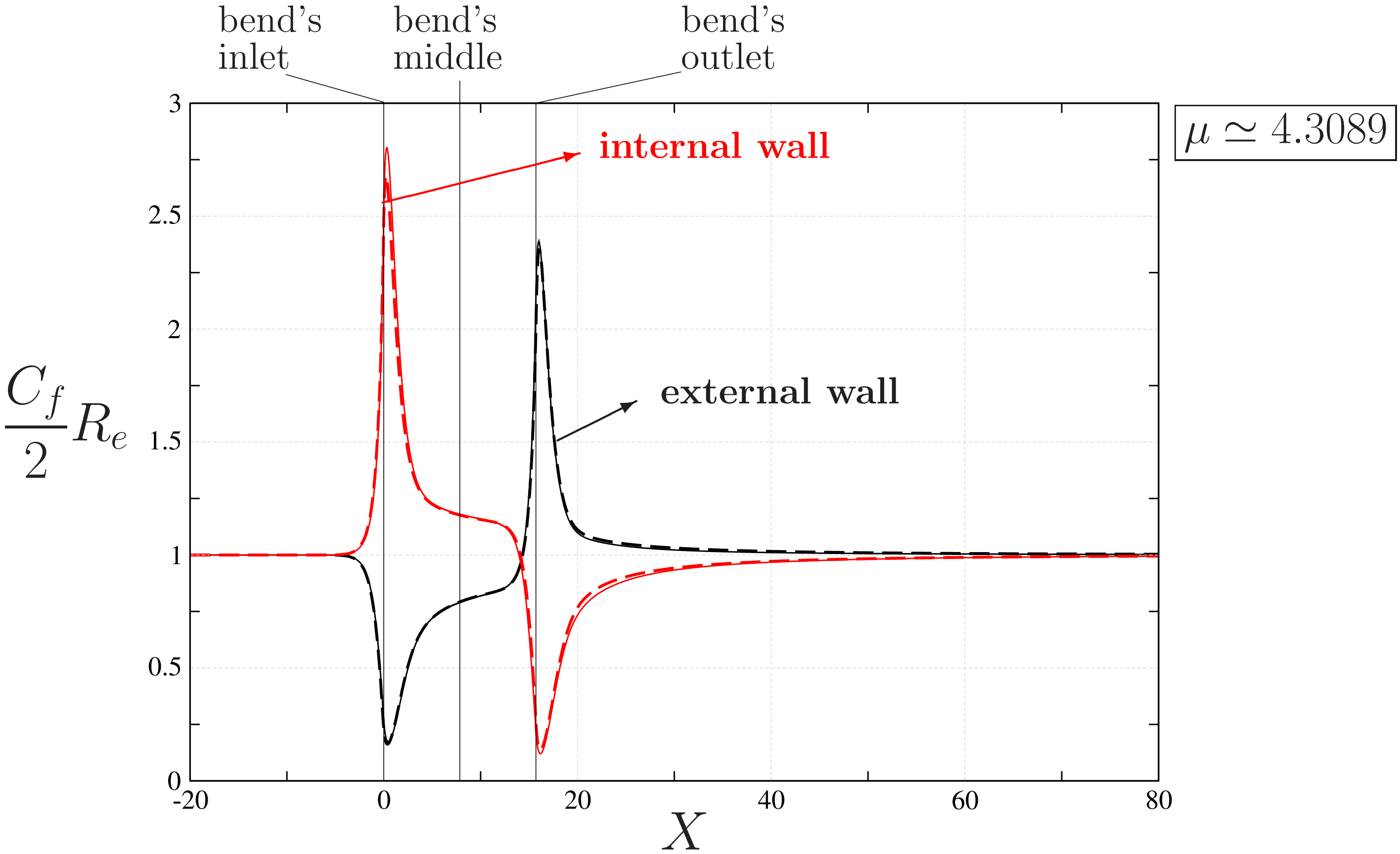


FIGURE 38 – *Coefficient de frottement* $\frac{c_f}{2}R_e$. $R_c = 5$, $R_e = 10000$, $\mu = R_e^{1/3}/R_c$
ligne continue : Navier-Stokes, pointillé : GIBL

Écoulement dans un coude

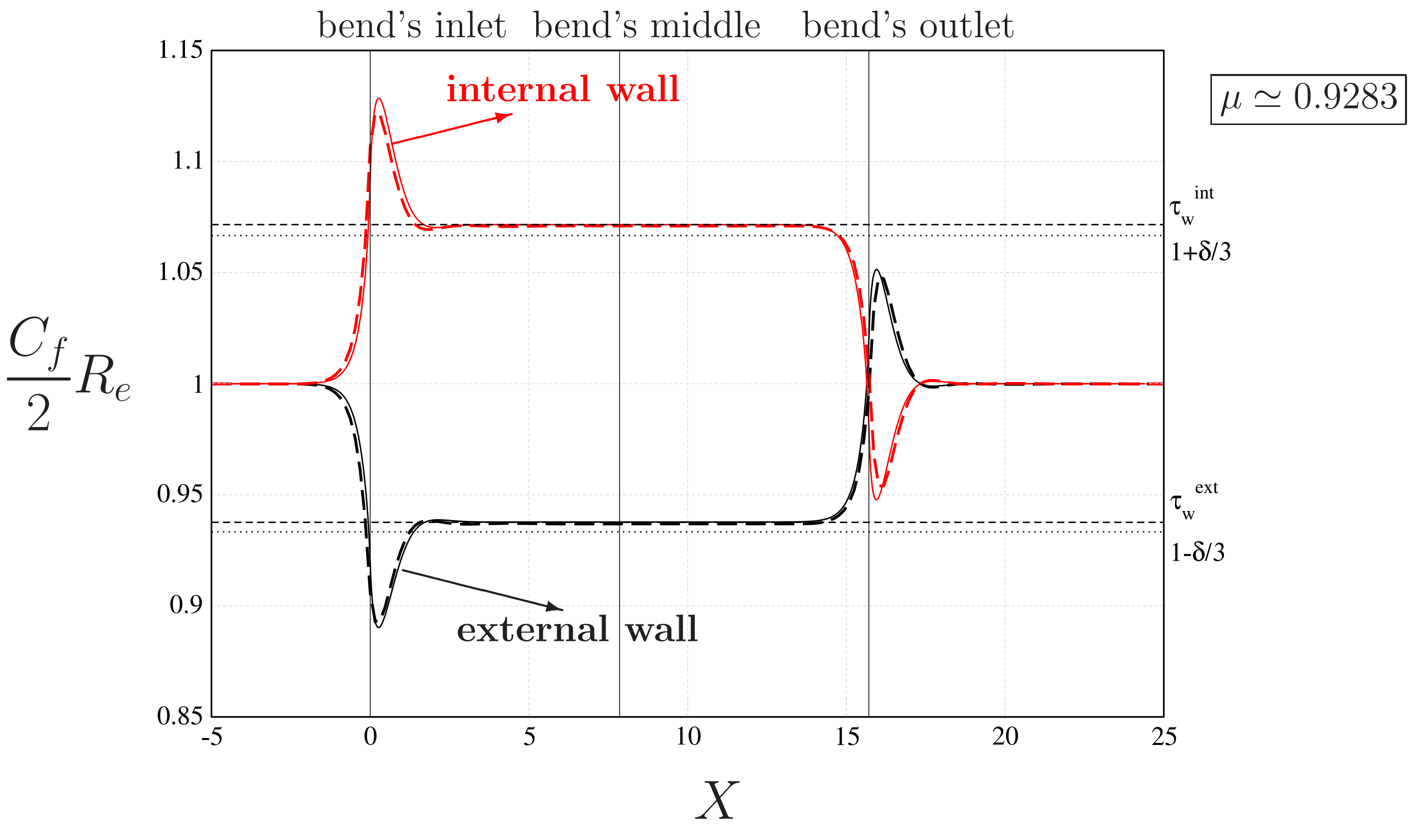


FIGURE 39 – *Coefficient de frottement* $\frac{c_f}{2}R_e$. $R_c = 5$, $R_e = 100$, $\mu = R_e^{1/3}/R_c$
ligne continue : Navier-Stokes, pointillé : GIBL

Écoulement dans un coude

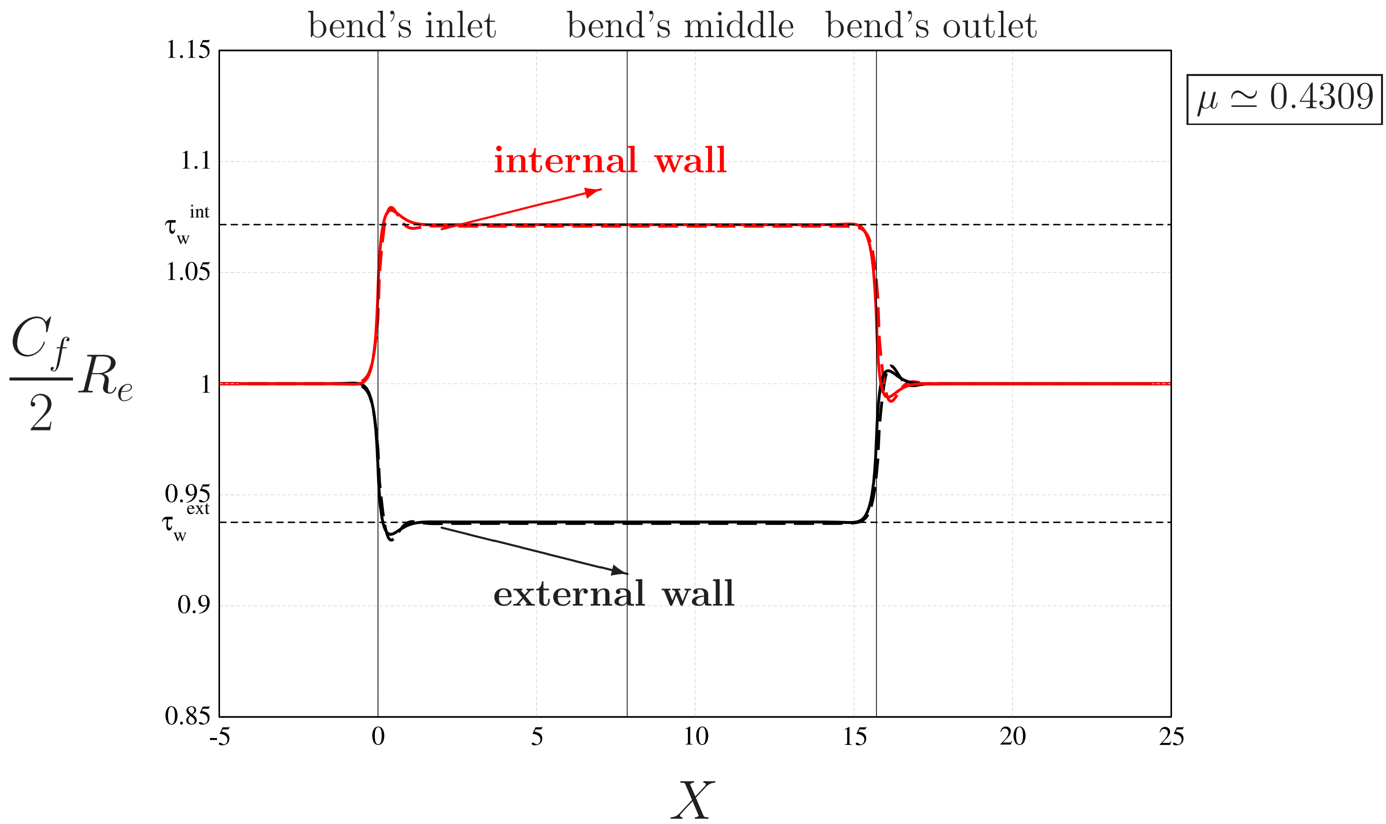


FIGURE 40 – *Coefficient de frottement* $\frac{c_f}{2}R_e$. $R_c = 5$, $R_e = 10$, $\mu = R_e^{1/3}/R_c$
ligne continue : Navier-Stokes, pointillé : GIBL

Écoulement dans un coude

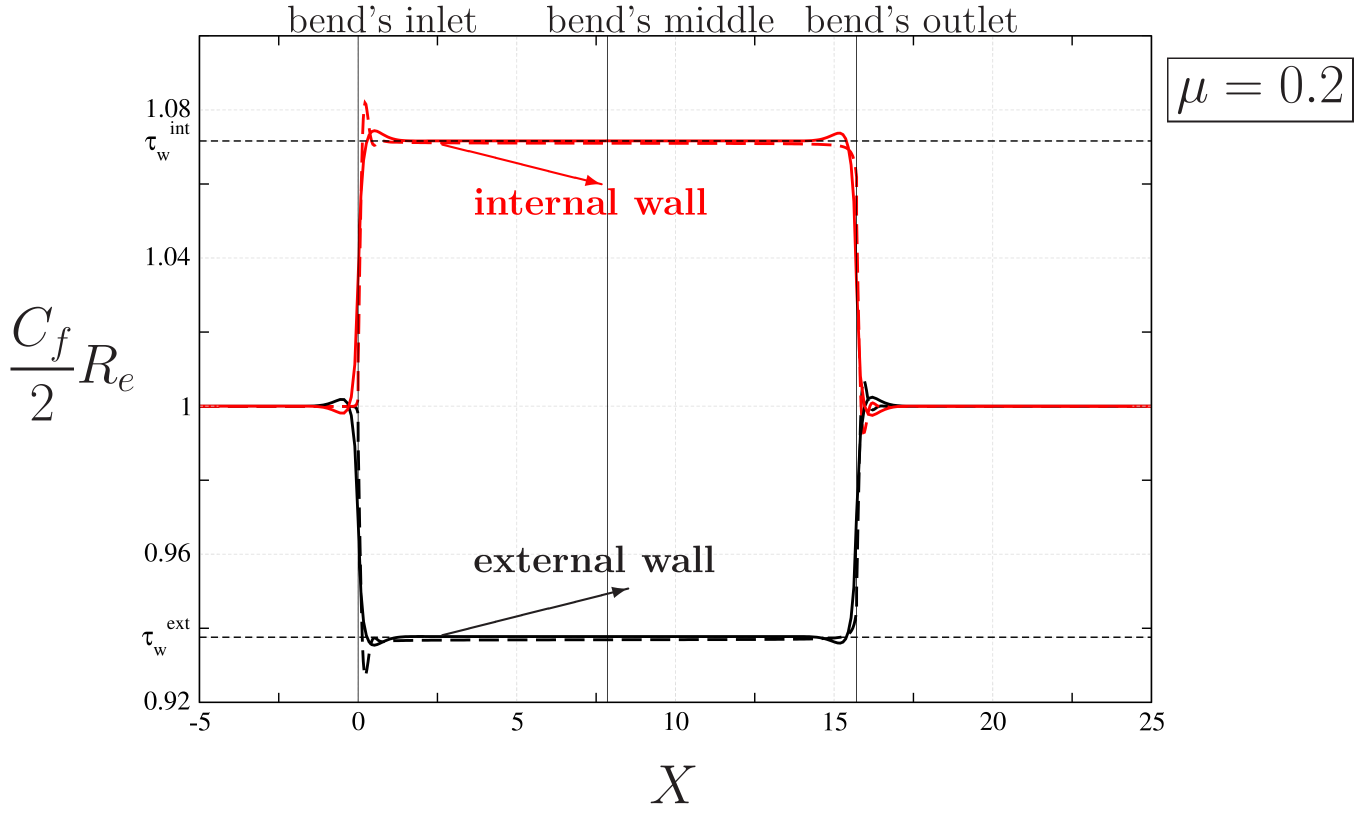


FIGURE 41 – *Coefficient de frottement* $\frac{c_f}{2}R_e$. $R_c = 5$, $R_e = 1$, $\mu = R_e^{1/3}/R_c$
ligne continue : Navier-Stokes, pointillé : GIBL

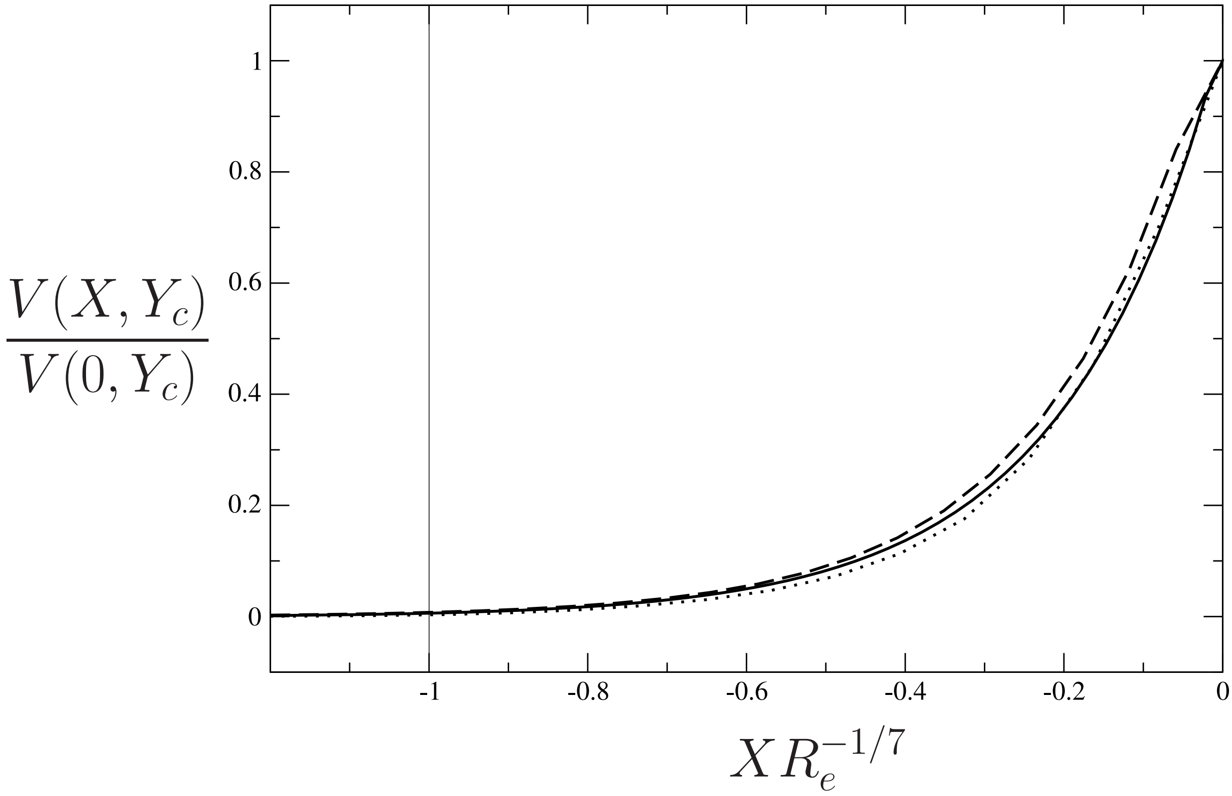


FIGURE 42 – *Étude de l'influence amont.* $100 \leq R_e \leq 10000$, $R_c = 5$

Conclusion

– Justification rationnelle des méthodes de couplage fort grâce aux développements généralisés

– Approximation uniformément valable. Pas de problème de raccord asymptotique.

– Prise en compte des conditions aux limites exactes

– Extension de la validité des résultats à des « petits paramètres qui ne sont pas petits »