Limitations de la théorie de couche limite

1 . Singularité de décollement à pression imposée

2 . Influence amont en supersonique

Théorie de la triple couche

– Explication

– Solution partielle : la perturbation tend vers 0 quand le nombre de Reynolds tend vers l'infini

Influence amont en supersonique

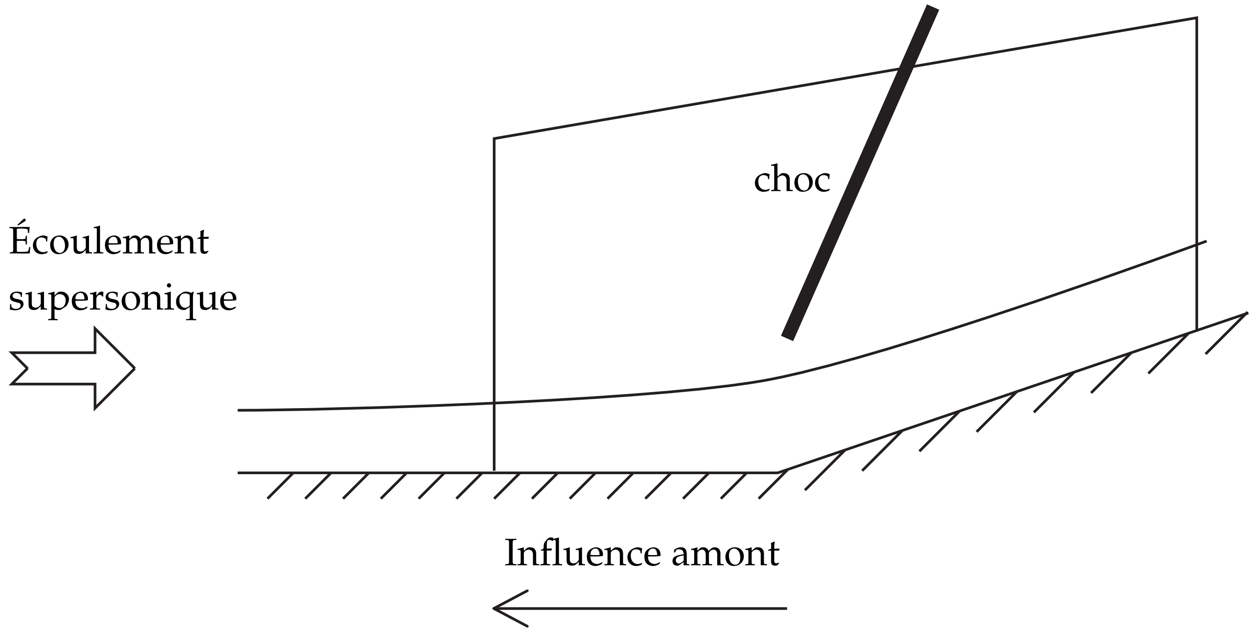


FIGURE 9 – *Influence amont en écoulement supersonique.*

Problème

– Écoulement extérieur supersonique. Problème hyperbolique

– Couche limite : problème parabolique

– Remontée de l'information sur une longueur beaucoup plus grande que l'épaisseur de couche limite

Solution de Lighthill

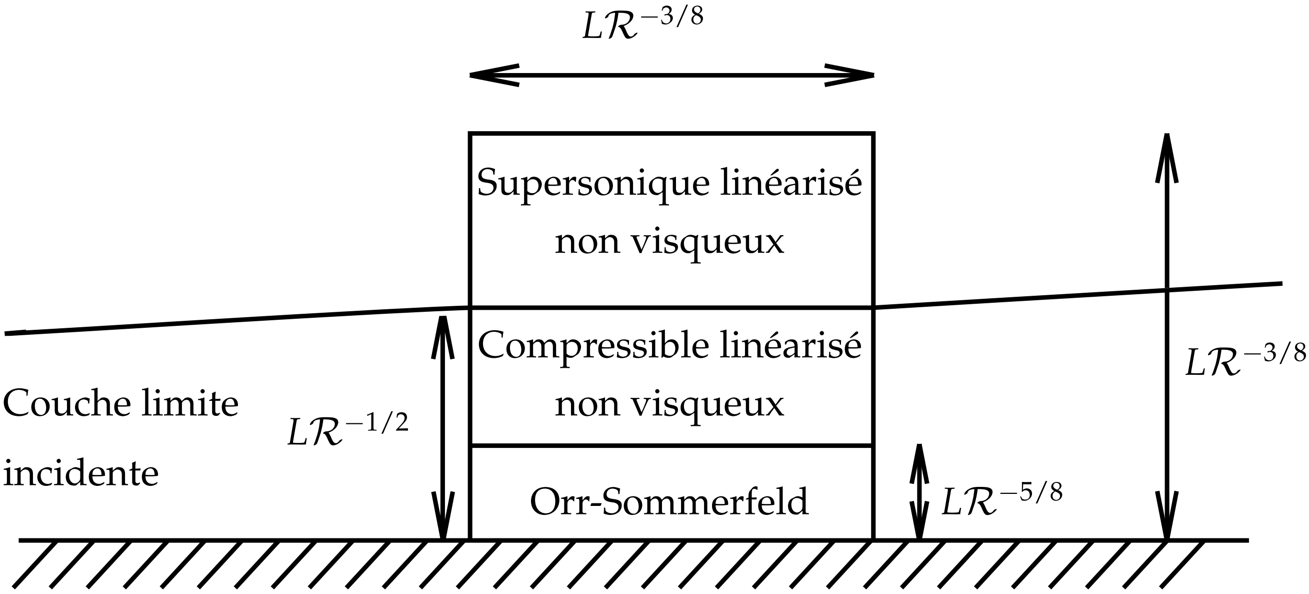


FIGURE 10 – *Solution de Lighthill pour les perturbations*

•Zone principale non visqueuse : les échelles sont telles que la viscosité n'agit pas pour les perturbations

•Les échelles sont imposées par les conditions de raccord

La théorie de la triple couche

Stewartson et Williams, Neyland, Messiter

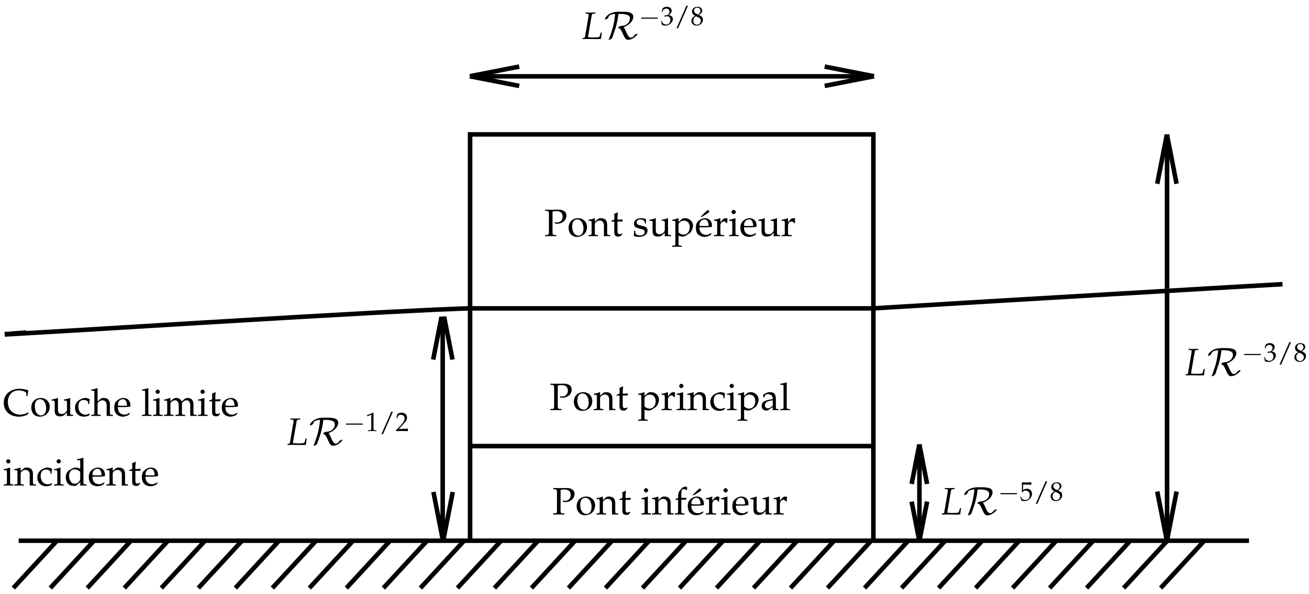


FIGURE 11 – *Structure en triple pont.*

Petit paramètre

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{R^{1/2}}}$$

Dimensions

Longitudinal

$$X = \frac{x - x_0}{\varepsilon^{3/4}}$$

Transversal

$$\text{Upper deck} \quad Y^* = \frac{y}{\varepsilon^{3/4}}$$

$$\text{Main deck} \quad Y = \frac{y}{\varepsilon}$$

$$\text{Lower deck} \quad \widetilde{Y} = \frac{y}{\varepsilon^{5/4}}$$

Développements asymptotiques

• Pont supérieur

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= 1 + \varepsilon^{1/2} U_1^*(X, Y^*) + \cdots \\
\mathcal{V} &= \varepsilon^{1/2} V_1^*(X, Y^*) + \cdots \\
\mathcal{P} &= \varepsilon^{1/2} P_1^*(X, Y^*) + \cdots
\end{aligned}
$$

• Pont principal

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= U_0(Y) + \varepsilon^{1/4} U_1(X, Y) + \cdots \\
\mathcal{V} &= \varepsilon^{1/2} V_1(X, Y) + \cdots \\
\mathcal{P} &= \varepsilon^{1/2} P_1(X, Y) + \cdots
\end{aligned}
$$

• Pont inférieur

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \varepsilon^{1/4} \widetilde{U}_1(X, \widetilde{Y}) + \cdots \\
\mathcal{V} &= \varepsilon^{3/4} \widetilde{V}_1(X, \widetilde{Y}) + \cdots \\
\mathcal{P} &= \varepsilon^{1/2} \widetilde{P}_1(X, \widetilde{Y}) + \cdots
\end{aligned}
$$

Contraintes sur les jauges

- Même jauge pour la pression partout
- Couche principale $\delta = LR^{-1/2}$
- Couche supérieure $\hat{\text{m}}$ étendue longitudinale et transversale
- Équation de continuité non triviale
- Couche inférieure : pression, inertie et viscosité $\hat{\text{m}}$ ordre
- Même ordre sur $\mathcal{V}$ entre U et M, pas de hiérarchie
- Même ordre sur $\mathcal{U}$ entre M et L
- Perturbation de $\mathcal{U}$ $\hat{\text{m}}$ ordre que U_0 dans L

Équations de la triple couche

•Pont supérieur

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_1^*}{\partial X} + \frac{\partial V_1^*}{\partial Y^*} &= 0 \\
\frac{\partial U_1^*}{\partial X} &= -\frac{\partial P_1^*}{\partial X} \\
\frac{\partial V_1^*}{\partial X} &= -\frac{\partial P_1^*}{\partial Y^*}
\end{aligned}$$

•Pont principal

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial V_1}{\partial Y} &= 0 \\
U_0\frac{\partial U_1}{\partial X} + V_1\frac{\partial U_0}{\partial Y} &= 0 \\
\frac{\partial P_1}{\partial Y} &= 0
\end{aligned}$$

•Pont inférieur

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{U}_1}{\partial X} + \frac{\partial \widetilde{V}_1}{\partial \widetilde{Y}} &= 0 \\
\widetilde{U}_1\frac{\partial \widetilde{U}_1}{\partial X} + \widetilde{V}_1\frac{\partial \widetilde{U}_1}{\partial \widetilde{Y}} &= -\frac{\partial \widetilde{P}_1}{\partial X} + \frac{\partial^2 \widetilde{U}_1}{\partial \widetilde{Y}^2} \\
\frac{\partial \widetilde{P}_1}{\partial \widetilde{Y}} &= 0
\end{aligned}$$

Caractéristiques de la solution

Dans le pont principal, la solution est :

$$\begin{aligned} U_1 &= A(X)U_0'(Y) \quad \text{avec} \quad U_0'(Y) = \frac{dU_0}{dY} \\ V_1 &= -A'(X)U_0(Y) \quad \text{avec} \quad A'(X) = \frac{dA}{dX} \end{aligned}$$

Fonction $A(X)$ inconnue telle que $A \to 0$ quand $X \to -\infty$.

Raccord entre L et M

$$\lim_{\widetilde{Y}\to\infty} (\widetilde{U}_1 - \lambda \widetilde{Y}) = \lambda A \quad \text{avec} \quad \lambda = U_0'$$

Raccord entre U et M

$$V_1^*(X,0) = \lim_{Y\to\infty} V_1(X,Y) = -A'(X)$$

Raccord sur la pression

$$P_1^*(X,0) = P_1(X) = \widetilde{P}_1(X)$$

Solution de la couche supérieure

$$P_1^*(X,0) = \frac{1}{\pi}\oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{V_1^*(\xi,0)}{X-\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{A'(X)}{X-\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

$$P_1^*(X,0) = -U_1^*(X,0)$$

$$\boxed{\text{Loi d'interaction} \quad : \quad \widetilde{P}_1(X) = \frac{1}{\pi}\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{A'(X)}{X-\xi}\,d\xi}$$

- Il faut préciser la perturbation
- Pas de hiérarchie entre les couches

Fonction de déplacement

Pente des lignes de courant dans la couche principale

$$\frac{v}{u} = -\frac{\varepsilon^{1/2} A'(X) U_0(Y)}{U_0(Y) + \varepsilon^{1/4} A(X) U_0'(Y)} = \frac{\varepsilon dY}{\varepsilon^{3/4} dX}$$

soit, au premier ordre :

$$\frac{dY}{dX} = -\varepsilon^{1/4} A'(X)$$

Équation des lignes de courant :

$$Y = -\varepsilon^{1/4} A(X) + C$$

avec

$$A \to 0 \quad \text{quand} \quad X \to -\infty$$

C constante qui dépend de la ligne de courant considérée.

Par rapport aux lignes de courant non perturbées dont l'équation est $Y = C$, on observe que ces lignes sont déplacées d'une quantité $-\varepsilon^{1/4} A(X)$ qui ne dépend que de X et pas de Y.

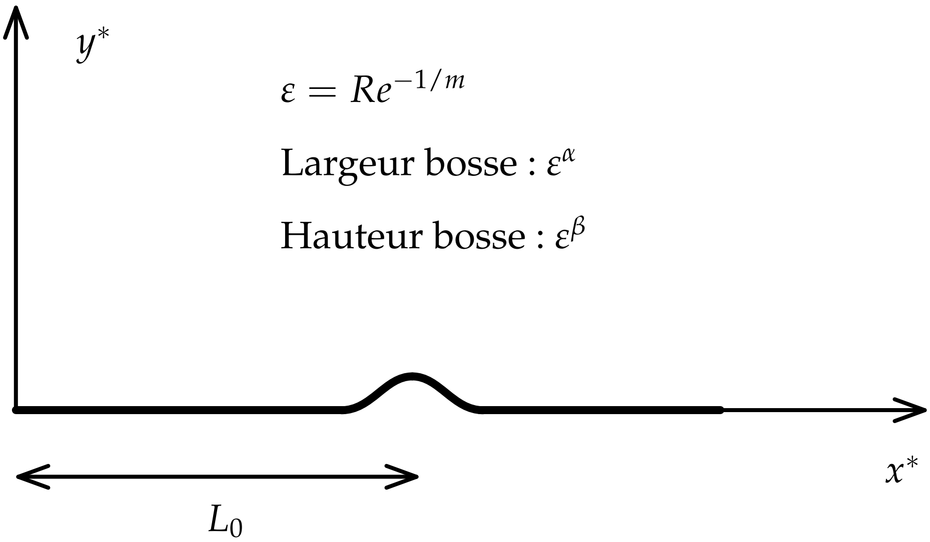


FIGURE 12 – *Écoulement sur plaque plane déformée par une bosse.*

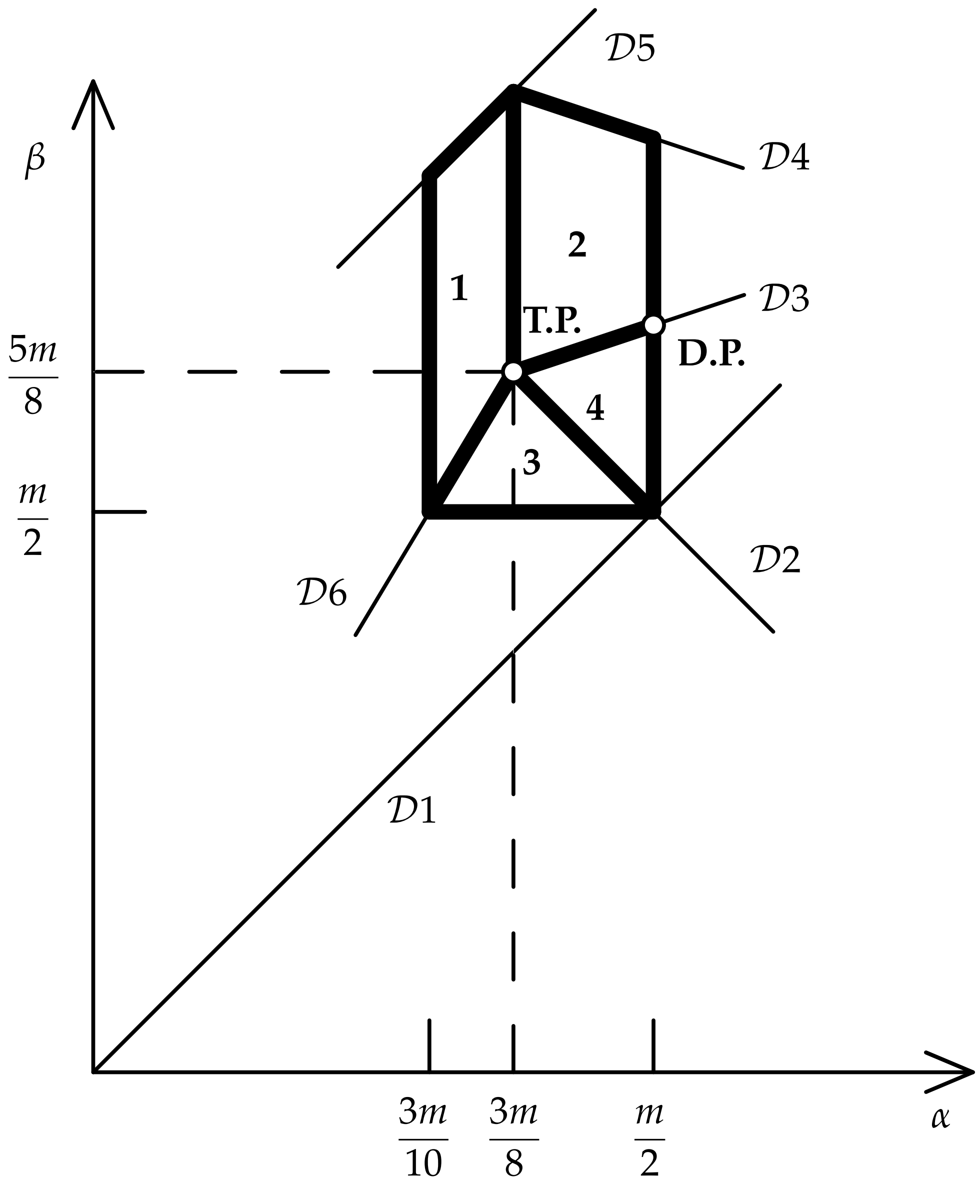
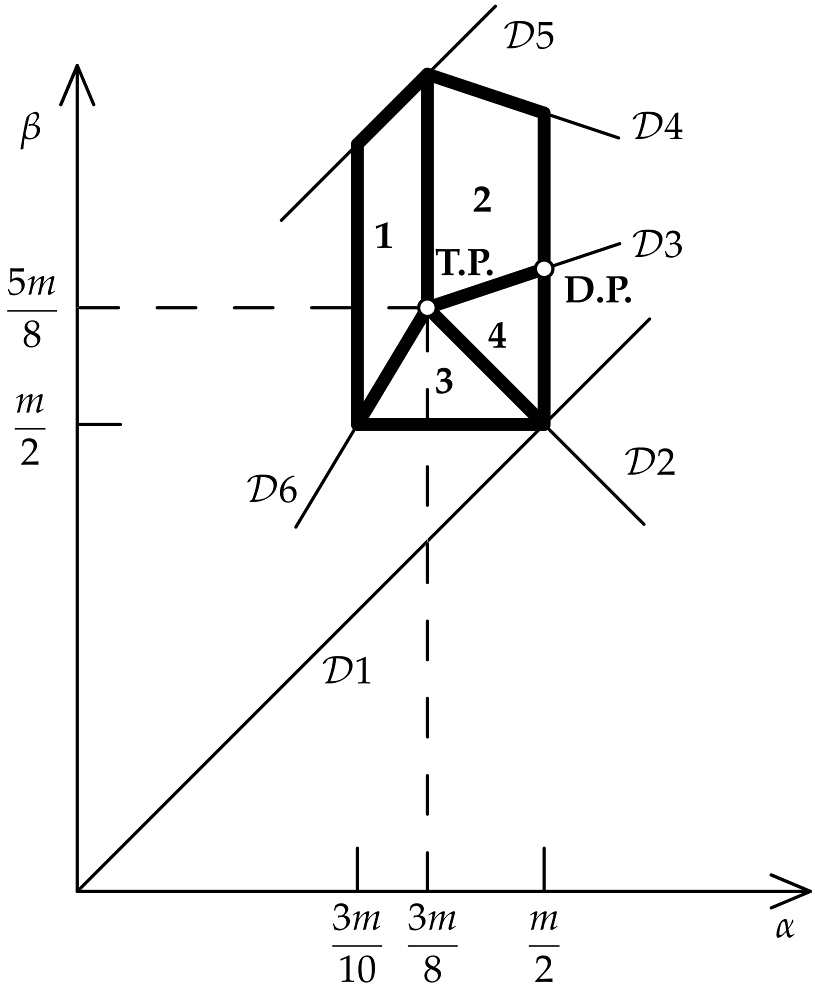


FIGURE 13 – *Délimitation des différentes zones autour du triple pont ;* **T.P.** *: triple pont,* **D.P.** *: double pont.*



• $\mathcal{D}_1$. $\beta \geq \alpha$. La bosse est plus large que haute.

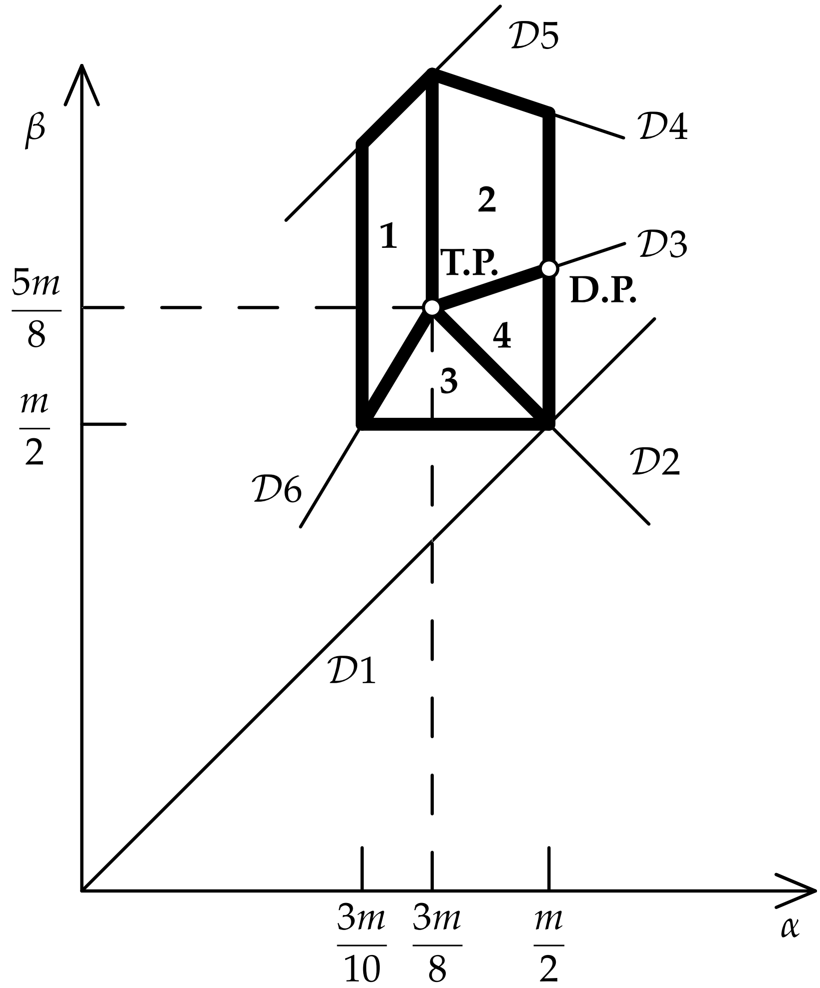
• $\beta \geq \dfrac{m}{2}$. La bosse est plus petite que la couche limite incidente.

• $\alpha \leq \dfrac{m}{2}$. La largeur de la bosse est plus grande que l'épaisseur de la couche limite incidente.

• $\alpha \geq \dfrac{3m}{10}$. Définit la hiérarchie entre U_1^* et $\overline{U}_2$.

• $\mathcal{D}_4$. $\beta + \dfrac{\alpha}{3} - \dfrac{m}{2} \leq \dfrac{m}{2}$ Les perturbations induites par la bosse sont plus grandes que celles induites par la couche limite incidente.

• $\mathcal{D}_5$. $\beta - \alpha \leq \dfrac{m}{2}$ Les perturbations induites par la bosse sont plus grandes que celles induites par la couche limite incidente.



■ Zones 1 et 2 : couche limite linéaire

■ Zones 3 et 4 : couche limite non linéaire

★ Zones 1 et 3 : mode direct

★ Zones 2 et 4 : mode inverse

- Triple couche : point remarquable, couche limite non linéaire, couplage entre les couches.
- Double couche : la couche supérieure a la même épaisseur que la couche limite incidente.

Couche limite interactive

1 . Les équations de couche limite contiennent les équations de couche intermédiaire et de couche inférieure de la triple couche

2 . Avec les développements réguliers, on aboutit à une structure hiérarchisée

Solution

Utiliser des développements généralisés

Première approximation

Équations de Navier-Stokes adimensionnées

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} &= 0 \\
\mathcal{U}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \mathcal{V}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} &= -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} \\
\mathcal{U}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \mathcal{V}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} &= -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varepsilon^2 = \frac{1}{R}} \qquad \boxed{R = \frac{U_0 L}{\nu}}$$

U_0 et L sont des échelles pour l'écoulement extérieur

Développements généralisés

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= u_1(x, y, \varepsilon) + \ldots \\
\mathcal{V} &= v_1(x, y, \varepsilon) + \ldots \\
\mathcal{P} &= p_1(x, y, \varepsilon) + \ldots
\end{aligned}$$

On néglige les termes d'ordre ε^2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0 \\
u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} \\
u_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial y} &= -\frac{\partial p_1}{\partial y}
\end{aligned}$$

Conditions aux limites

- à l'infini, l'écoulement devient uniforme de vitesse donnée
- aux parois ? ?

Détermination d'une AUV

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= u_1(x,y,\varepsilon) + U_1(x,Y,\varepsilon) + \dots \\
\mathcal{V} &= v_1(x,y,\varepsilon) + \varepsilon V_1(x,Y,\varepsilon) + \dots \\
\mathcal{P} &= p_1(x,y,\varepsilon) + \Delta(\varepsilon) P_1(x,Y,\varepsilon) + \dots
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\Delta = ?} \qquad \boxed{Y = \frac{y}{\varepsilon}}$$

Choix de la jauge pour V_1

Équation de continuité

$$\text{avec} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad \text{on obtient} \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon V_1}{\partial y} = 0$$

d'où

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial Y} = 0$$

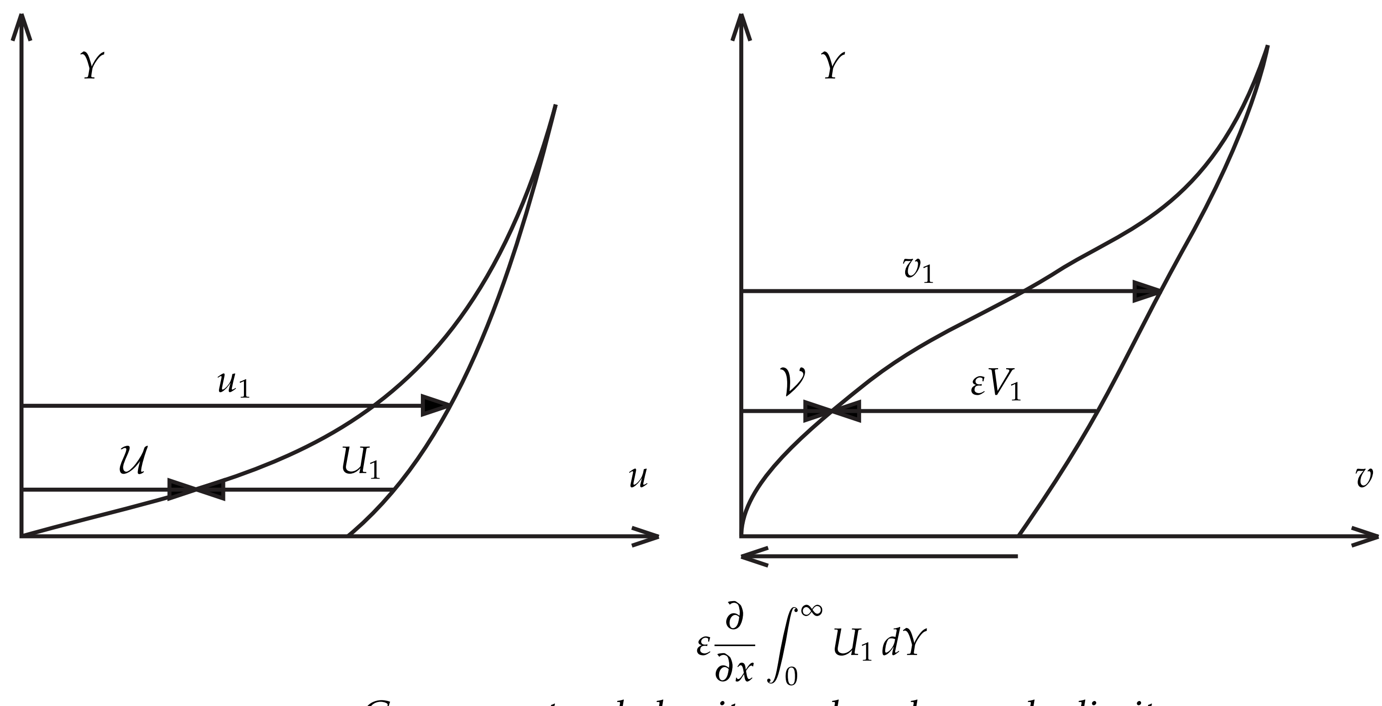


FIGURE 14 – *Composantes de la vitesse dans la couche limite.*

Dans la région de paroi

- u_1 est du même ordre que U_1
- v_1 est du même ordre que εV_1

Jauge pour la pression

Équation de quantité de mouvement suivant y

$$U_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \varepsilon U_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + \varepsilon u_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + \varepsilon V_1 \frac{\partial V_1}{\partial Y} + v_1 \frac{\partial V_1}{\partial Y} =$$
$$-\frac{\Delta}{\varepsilon}\frac{\partial P_1}{\partial Y} + \varepsilon \frac{\partial^2 V_1}{\partial Y^2} + \mathrm{O}(\varepsilon^2)$$

Tous les termes sont d'ordre ε.

- si $\Delta \succ \varepsilon^2$, résultat sans intérêt $\dfrac{\partial P_1}{\partial Y} = 0$
- si $\Delta \prec \varepsilon^2$, l'équation restante ne pourrait pas être vérifiée

Donc

$$\boxed{\Delta = \varepsilon^2}$$

<u>Couche limite interactive au premier ordre</u>

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= u_1(x,y,\varepsilon) + U_1(x,Y,\varepsilon) + \dots \\
\mathcal{V} &= v_1(x,y,\varepsilon) + \varepsilon V_1(x,Y,\varepsilon) + \dots \\
\mathcal{P} &= p_1(x,y,\varepsilon) + \varepsilon^2 P_1(x,Y,\varepsilon) + \dots
\end{aligned}
$$

u_1, v_1, p_1 : équations d'Euler

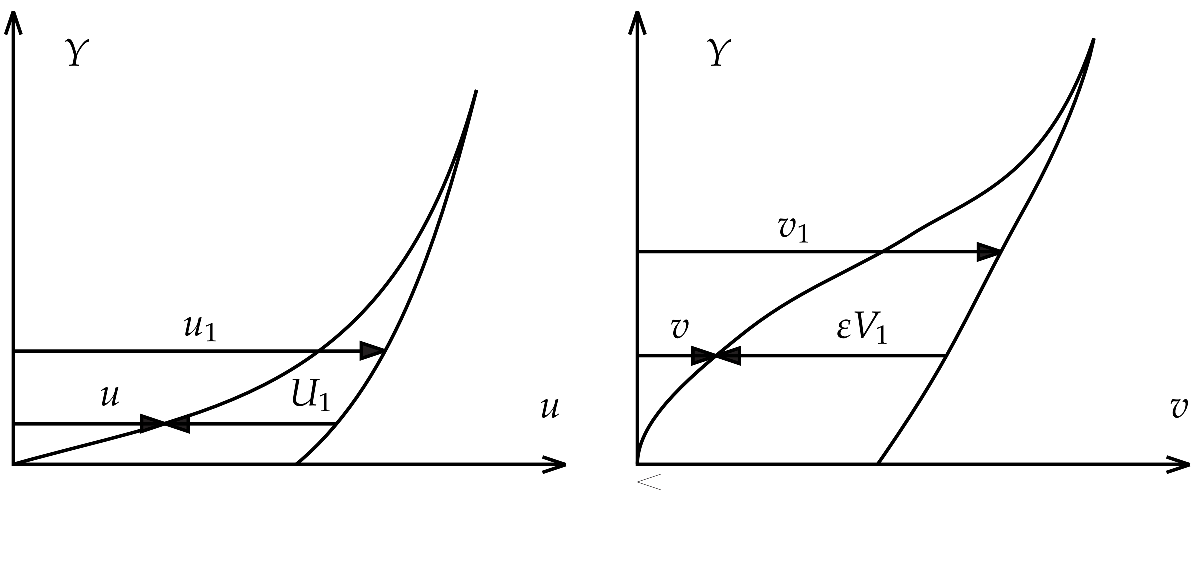
Termes d'ordre ε négligés dans les équations de Navier-Stokes

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial Y} &= 0 \\
U_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + V_1 \frac{\partial U_1}{\partial Y} + \frac{v_1}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial Y} &= \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2}
\end{aligned}
$$

Conditions aux limites

paroi : $U_1 + u_1 = 0$
$\varepsilon V_1 + v_1 = 0$

infini : $U_1 \to 0$
$V_1 \to 0$



Couche limite interactive au premier ordre

On pose

$$\begin{aligned} u &= u_1 + U_1 \\ v &= v_1 + \varepsilon V_1 \\ p &= p_1 + \varepsilon^2 P_1 \end{aligned}$$

Équations de couche limite interactive au premier ordre

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - v\frac{\partial u_1}{\partial y} &= u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{\mathcal{R}}\frac{\partial^2 (u-u_1)}{\partial y^2} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0 \\ u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} \\ u_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial y} &= -\frac{\partial p_1}{\partial y} \end{aligned} \right.$$

Conditions aux limites

$$\begin{array}{lccc} \text{paroi} & : & U_1 + u_1 = 0 & u = 0 \\ & & \varepsilon V_1 + v_1 = 0 & v = 0 \\ & & \text{ou} & \\ \text{infini} & : & U_1 \to 0 & u - u_1 \to 0 \\ & & V_1 \to 0 & v - v_1 \to 0 \end{array}$$

À l'infini, l'écoulement non visqueux devient uniforme

Modèle au second ordre

On pose

$$
\begin{aligned}
u &= u_1 + U_1 \\
v &= v_1 + \varepsilon V_1 \\
p &= p_1 + \varepsilon^2 P_1
\end{aligned}
$$

Équations de couche limite interactive au second ordre, on néglige les termes d'ordre ε^2

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{1}{\mathcal{R}}\frac{\partial^2(u-u_1)}{\partial y^2}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0 \\
u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} \\
u_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial y} &= -\frac{\partial p_1}{\partial y}
\end{aligned}
\right.
$$

Conditions aux limites

paroi : $u = 0$
$v = 0$

infini : $u - u_1 \to 0$
$v - v_1 \to 0$

À l'infini, l'écoulement non visqueux devient uniforme

Effet de déplacement

Interprétation de

$$\lim_{y\to\infty}(v - v_1) = 0$$

Équations de continuité

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0
\end{aligned}$$

d'où

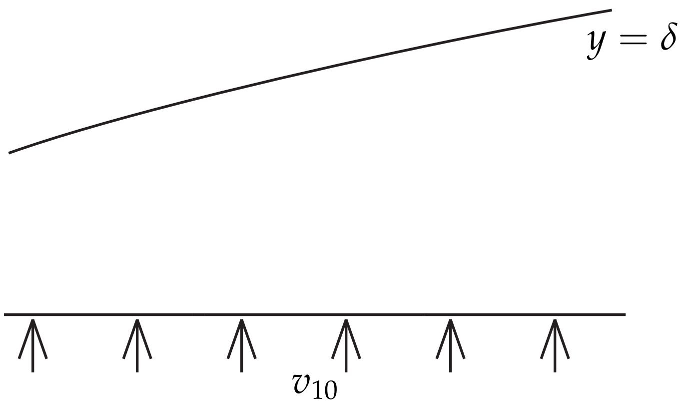
$$\begin{aligned}
v &= -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y \\
v_1 &= v_{10} - \int_0^y \frac{\partial u_1}{\partial x}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

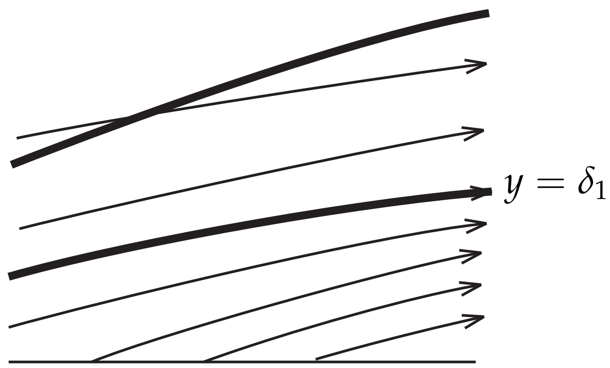
Donc

$$v - v_1 = \int_0^y \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\,\mathrm{d}y - v_{10}$$

Effet de déplacement

$$\boxed{v_{10} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\infty (u_1 - u)\,\mathrm{d}y}$$





Conclusion

1 . Origine des limitations de la théorie de couche limite : hiérarchie entre les couches

2 . Solution (révolutionnaire) : briser la hiérarchie !

3 . La clé : raccord sur la vitesse normale entre l'écoulement non visqueux et la couche limite

4 . Triple couche : on ajoute une couche

5 . Couche limite interactive : on utilise des développements généralisés