

Écoulements à grand nombre de Reynolds

1 . Couche limite de Prandtl

2 . Théorie au second ordre Van Dyke

3 . Problèmes numériques en présence d'un gradient de pression positif

4 . Analyse de Goldstein

5 . Méthodes inverses Catherall et Mangler

6 . Analyse de l'influence amont de Lighthill

7 . Triple couche Stewartson et Williams, Neyland, Messiter

8 . Développement des méthodes de couplage visqueux-non visqueux

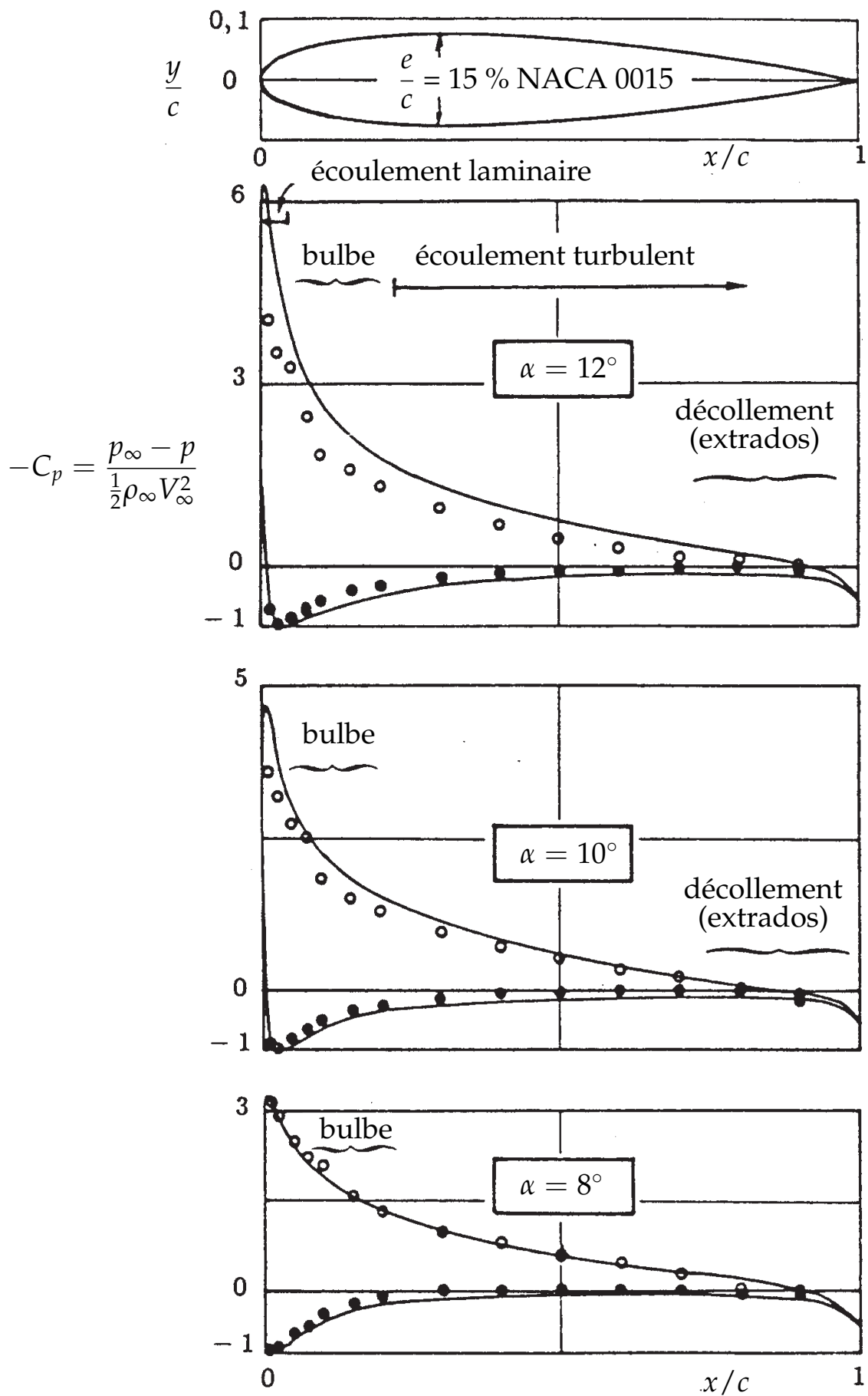


FIGURE 1 - Distributions de pression pariétale sur le profil NACA 0015 d'après l'expérience (symboles) et calculées en écoulement non visqueux par la méthode des singularités. Les expériences ont été réalisés au Laboratoire d'Aérodynamique de SUPAERO par F. Marty

Couche limite de Prandtl

Typiquement : écoulement autour d'un profil d'aile

Échelle de vitesse U_0 , Échelle de longueur L

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial y^2}$$

x et y sont sans dimension.

$$R = \frac{U_0 L}{\nu}$$

Quand $R \rightarrow \infty$, on obtient les équations d'Euler.

On cherche un développement de la forme :

$$\mathcal{U} = u_1 + \dots$$

$$\mathcal{V} = v_1 + \dots$$

$$\mathcal{P} = p_1 + \dots$$

Couche limite

Dans la couche limite, les variations de vitesse se produisent sur une longueur ℓ dans une direction normale à la paroi

$$\rho U \frac{\partial U}{\partial x} \sim \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{\rho U_0}{L} = \frac{\mu}{\ell^2}$$

$$\boxed{\frac{\ell}{L} = R^{-1/2}}$$

Petit paramètre ε :

$$\boxed{\varepsilon^2 = \frac{1}{R}}$$

d'où la variable adaptée à la couche limite :

$$\boxed{Y = \frac{y}{\varepsilon}}$$

Une variation de vitesse de l'ordre de U_0 se produit sur une distance Y d'ordre 1.

On cherche un développement de la forme :

$$U = U(x, Y) + \dots$$

$$V = \varepsilon V(x, Y) + \dots$$

$$P = P(x, Y) + \dots$$

Équations de couche limite

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -R \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

Simplification quand $R \rightarrow \infty$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial Y}$$

Le raccord

Zone externe

$$\mathcal{U} = u_1(x, y) + \varepsilon u_2(x, y) + \dots$$

$$\mathcal{V} = v_1(x, y) + \varepsilon v_2(x, y) + \dots$$

$$\mathcal{P} = p_1(x, y) + \varepsilon p_2(x, y) + \dots$$

Zone interne

$$\mathcal{U} = U(x, Y) + \dots$$

$$\mathcal{V} = \varepsilon V(x, Y) + \dots$$

$$\mathcal{P} = P(x, Y) + \dots$$

Raccord :

$$\text{IE } \mathcal{U} = \text{EI } \mathcal{U}$$

$$\text{IE } \mathcal{V} = \text{EI } \mathcal{V}$$

$$\text{IE } \mathcal{P} = \text{EI } \mathcal{P}$$

Ordre 1 :

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} U(x, Y) = u_1(x, 0)$$

$$v_1(x, 0) = 0$$

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} P(x, Y) = p_1(x, 0)$$

Ordre 2 :

$$v_2(x, 0) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \left[V(x, Y) - Y \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)_{y=0} \right]$$

Les trois étapes du couplage

1. Calcul de l'écoulement non visqueux autour du profil réel, avec condition de Zhukovskii au bord de fuite. Résultat $p_1(x, 0)$

2. Calcul de la couche limite avec

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} U_1 = u_1(x, 0)$$

3. Correction de l'écoulement non visqueux

Interprétation de la condition sur $v_2(x, 0)$

$$v_2(x, 0) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \left[V - Y \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)_{y=0} \right]$$

Équation de continuité

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

$$v_2(x, 0) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} (-U + u_1(x, 0)) \, dY = \frac{d}{dx} (U_e \Delta_1)$$

$$\Delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_e} \right) \, dY$$

$v_2(x, 0)$ = vitesse de transpiration qui simule l'effet de couche limite

Singularité de Goldstein

Structure de la solution des équations de couche limite en aval d'un point x_0 où le profil des vitesses est connu.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

En $x = x_0$, on a :

$$u = a_1(x)y + a_2(x)y^2 + a_3(x)y^3 + \dots$$
$$-\frac{dp}{dx} = p_0 + p_1(x - x_0) + p_2(x - x_0)^2 + \dots$$

En reportant dans les équations de couche limite, on a les conditions de compatibilité :

$$2a_2 + p_0 = 0 \quad ; \quad a_3 = 0 \quad ; \quad a_1 \frac{da_1}{dx} - 24a_4 = 0$$

On suppose que la condition $2a_2 + p_0 = 0$ est vérifiée. On étudie le cas $a_1 = 0$ en $x = x_0$:

$$a_1 \frac{da_1}{dx} - 24a_4 = 0 \quad \text{donne} \quad a_1 = \sqrt{48a_4(x - x_0)}$$

solution possible en amont si $a_4 < 0$ mais impossible en aval.

Structure de la solution en amont du décollement

Les variables sans dimension suivantes sont définies :

$$x = \frac{x_0^* - x^*}{\ell} \quad ; \quad y = \frac{y^*}{\ell} R^{1/2} \quad ; \quad u = \frac{u^*}{u_{e0}^*} \quad ; \quad v = \frac{v^*}{u_{e0}^*} R^{1/2}$$

$$\ell = -\frac{u_{e0}^*}{\left(\frac{du_e^*}{dx^*}\right)_{x_0^*}} \quad ; \quad R = \frac{u_{e0}^* \ell}{\nu}$$

Le gradient de pression est imposé :

$$\frac{dp}{dx} = -(1 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots)$$

En $x = 0$, le profil de vitesses est donné :

$$u(0, y) = a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots$$

Structure de la solution en amont du décollement

$$\text{Zone interne} : \zeta = x^{1/n} ; \eta = \frac{y}{2^{1/2}x^{1/n}}$$

$$\text{Zone externe} : \zeta = x^{1/n} ; y$$

$$\text{Zone interne} : u = 2(f'_0(\eta) + \zeta f'_1(\eta) + \zeta^2 f'_2(\eta) + \dots)$$

$$\text{Zone externe} : u = \chi'_0(y) + \zeta \chi'_1(y) + \zeta^2 \chi'_2(y) + \dots$$

Condition de raccord :

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{f'_r}{\eta^r} = \frac{a_r}{2} 2^{r/2}$$

On montre que :

$$f_0 = 0 ; f_1 = 0 ; f_2 = \frac{\eta^3}{6} ; f_3 = \alpha_1 \eta^2$$

et :

$$a_4 = -\frac{\alpha_1^2}{6}$$

En aval du point x_0 , on montre que :

$$a_4 = \frac{\beta_1^2}{6}$$

En général, c'est impossible, sauf pour des distributions particulières de $u_e(x)$. Mode inverse proposé par Catherall et Mangler.

Méthode intégrale

$$\frac{d\delta_3}{dx} + 3\frac{\delta_3}{u_e}\frac{du_e}{dx} = 2C_D$$
$$\frac{d\theta}{dx} + \theta\frac{H + 2}{u_e}\frac{du_e}{dx} = \frac{C_f}{2}$$

Définitions

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy ; \quad \delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2}\right) dy$$
$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy ; \quad H = \frac{\delta_1}{\theta}$$

Le coefficient de dissipation C_D et le coefficient de frottement C_f sont définis par :

$$C_D = \frac{1}{\rho u_e^3} \int_0^\infty \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy ; \quad \frac{C_f}{2} = \frac{\tau_p}{\rho u_e^2}$$

où τ_p est la contrainte de frottement pariétal :

$$\tau_p = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$$

Relations de fermeture

$$\frac{2C_D \mathcal{R}_\theta}{H_{32}} = F_1(H)$$

$$\frac{C_f}{2} \mathcal{R}_\theta = F_2(H)$$

$$H_{32} = F_3(H)$$

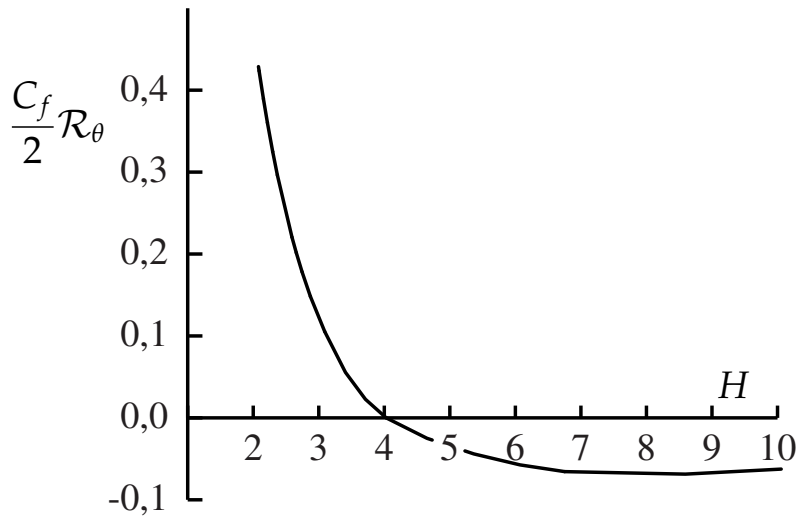


FIGURE 2 – Coefficient de frottement.

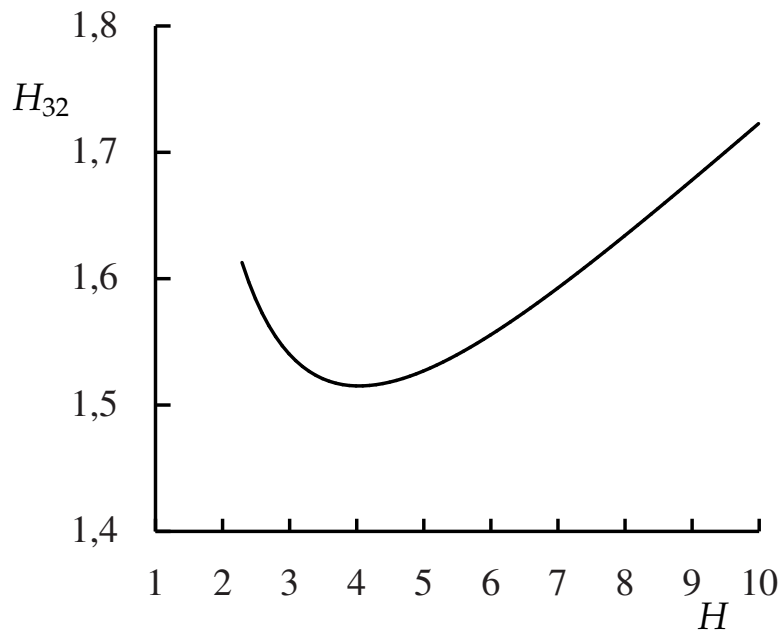


FIGURE 3 – Fonction $H_{32}(H)$.

Mode direct

Par définition :

$$H_{32} = \frac{\delta_3}{\theta}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_3}{dx} &= H_{32} \frac{d\theta}{dx} + \theta H'_{32} \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta_1}{\theta} \right) \\ &= (H_{32} - \theta H'_{32}) \frac{d\theta}{dx} + H'_{32} \frac{d\delta_1}{dx} \end{aligned}$$

Mode direct : $u_e(x)$ est imposée.

Équations à résoudre :

$$\begin{aligned} (H_{32} - \theta H'_{32}) \frac{d\theta}{dx} + H'_{32} \frac{d\delta_1}{dx} &= 2C_D - 3 \frac{\delta_3}{u_e} \frac{du_e}{dx} \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{C_f}{2} - \theta \frac{H + 2}{u_e} \frac{du_e}{dx} \end{aligned}$$

Déterminant du système :

$$\Delta = -H'_{32}$$

En général, la solution est impossible quand $\Delta = 0$, $\frac{d\delta_1}{dx} \rightarrow \infty$

Le point $\Delta = 0$ correspond au décollement.

Mode inverse

On suppose que $\delta_1(x)$ est connue.

Équations à résoudre :

$$\begin{aligned} (H_{32} - HH'_{32}) \frac{d\theta}{dx} + 3 \frac{\delta_3}{u_e} \frac{du_e}{dx} &= 2C_D - H'_{32} \frac{d\delta_1}{dx} \\ \frac{d\theta}{dx} + \theta \frac{H + 2}{u_e} \frac{du_e}{dx} &= \frac{C_f}{2} \end{aligned}$$

Le déterminant ne s'annule pas. Problème toujours possible mais $\delta_1(x)$?

Mode simultané

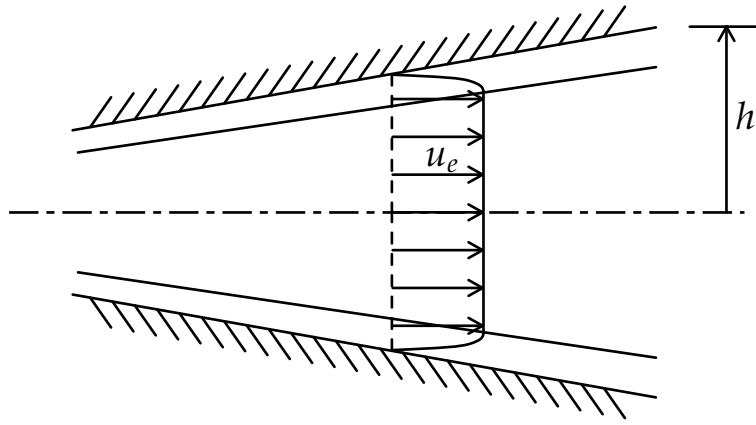


FIGURE 4 - Écoulement dans un diffuseur.

Conservation du débit :

$$u_e(h - \delta_1) = C_{et}$$

soit :

$$u_e \frac{dh}{dx} - u_e \frac{d\delta_1}{dx} + (h - \delta_1) \frac{du_e}{dx} = 0$$

La forme du diffuseur $h(x)$ est connue.

Les équations à résoudre sont :

$$\begin{aligned} (H_{32} - HH'_{32}) \frac{d\theta}{dx} + H'_{32} \frac{d\delta_1}{dx} + 3 \frac{\delta_3}{u_e} \frac{du_e}{dx} &= 2C_D \\ \frac{d\theta}{dx} + \theta \frac{H + 2 \frac{du_e}{dx}}{u_e} &= \frac{C_f}{2} \\ - u_e \frac{d\delta_1}{dx} + (h - \delta_1) \frac{du_e}{dx} &= -u_e \frac{dh}{dx} \end{aligned}$$

Étude du déterminant

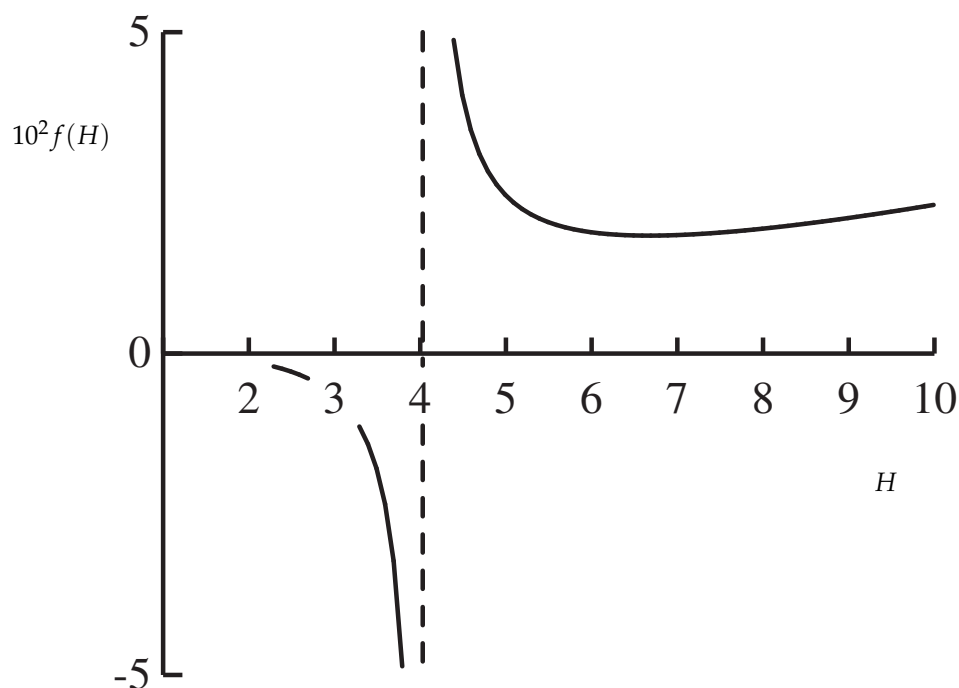


FIGURE 5 – Function $f(H) = \frac{(H_{32} - HH'_{32})(H + 2) + HH'_{32} - 3H_{32}}{H'_{32}}$

Le déterminant s'annule quand :

$$\frac{h}{\theta} = f(H)$$

avec :

$$f(H) = \frac{(H_{32} - HH'_{32})(H + 2) + HH'_{32} - 3H_{32}}{H'_{32}}$$

Le déterminant est non nul si $\frac{h}{\theta} < 183,5$

Couplage visqueux-non visqueux

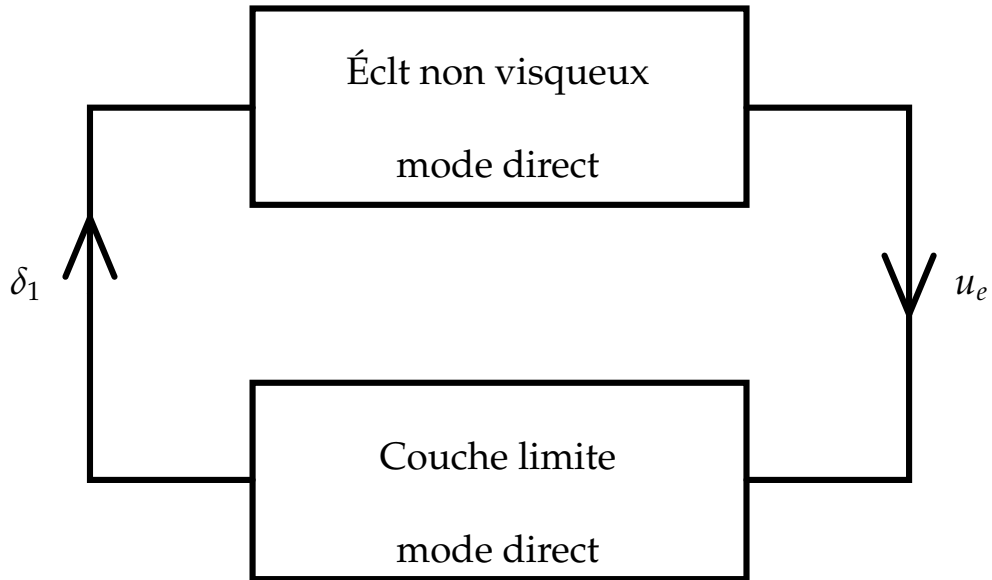


FIGURE 6 – *Interaction visqueuse-non visqueuse. Mode direct.*

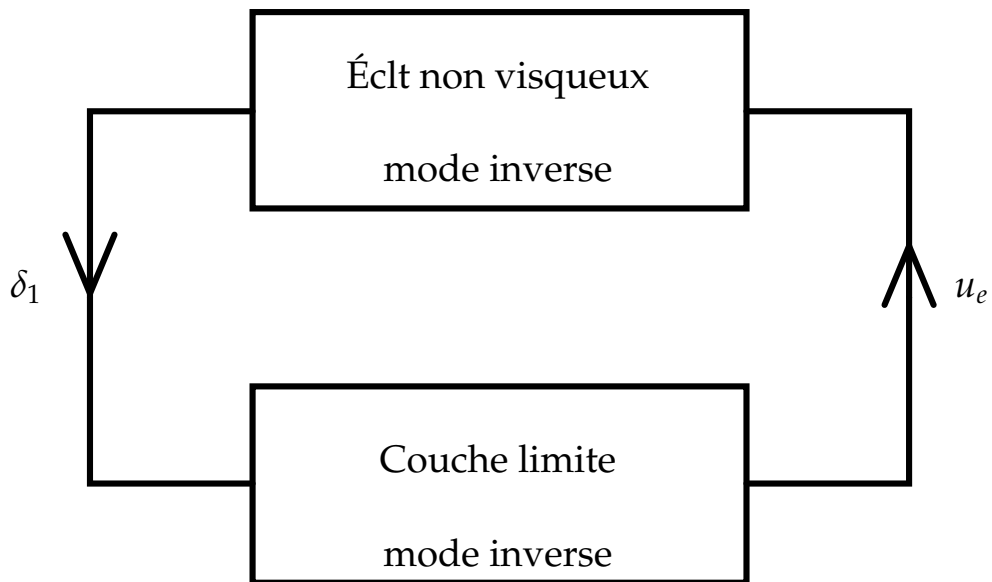


FIGURE 7 – *Interaction visqueuse-non visqueuse. Mode inverse.*

Couplage visqueux-non visqueux

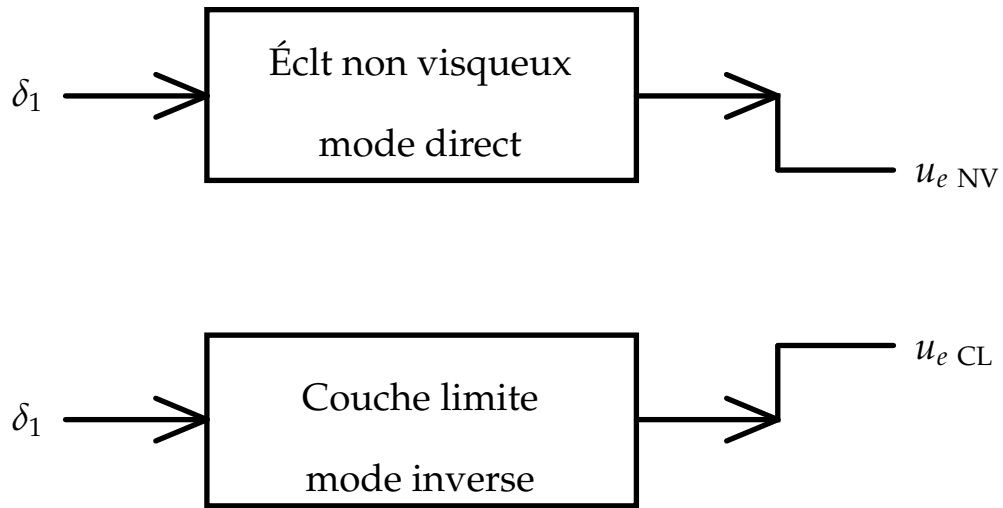


FIGURE 8 – *Interaction visqueuse-non visqueuse. Mode semi-inverse.*

Méthode itérative de Carter :

$$\delta_1^{n+1}(x) = \delta_1^n(x) \left[1 + \omega \left(\frac{u_{e\text{ CL}}^n(x)}{u_{e\text{ NV}}^n(x)} - 1 \right) \right]$$

ω est un facteur de relaxation.

Méthode simultanée de Veldman

Considérons par exemple l'écoulement sur une plaque plane perturbée par une petite déformation locale de la paroi.

Vitesse extérieure

$$u_e(x) = u^0 + \delta u_e(x)$$

u^0 est la vitesse induite par la forme de la paroi réelle.

$\delta u_e(x)$ est la perturbation due à la couche limite :

$$\delta u_e = \frac{1}{\pi} \oint_{x_a}^{x_b} \frac{v_s}{x - \bar{\zeta}} d\bar{\zeta}$$

où v_s est la vitesse de soufflage :

$$v_s(\bar{\zeta}) = \frac{d}{d\bar{\zeta}} [u_e(\bar{\zeta}) \delta_1(\bar{\zeta})]$$

qui simule l'effet de la couche limite dans la région (x_a, x_b) .

L'intégrale de Hilbert et les équations de couche limite sont résolues simultanément à l'aide d'une méthode itérative.