

Homogénéisation des matériaux à structure périodique

Ecole d'été

« Méthodes asymptotiques en mécanique »

Quiberon septembre 2012

D. CAILLERIE

Grenoble INP - UJF - CNRS

Laboratoire 3SR

Domaine Universitaire BP 53 X

38041 GRENOBLE Cedex, FRANCE

Denis.Caillerie@grenoble-inp.fr

## Introduction

L'homogénéisation, aussi appelée *changement d'échelles* ou *passage micro-macro* ou *upscaling* . . . , désigne la procédure qui consiste à déterminer la modélisation homogène d'un milieu finement hétérogène.

Pour que l'homogénéisation soit possible, il faut que le milieu présente au moins deux échelles. Une échelle fine où l'on voit le détail des hétérogénéités : fibres dans un composite, porosités dans un milieu poreux, micro fractures dans un milieu endommagé, . . . et une échelle plus grossière où tous ces détails ne sont plus discernables.

Il existe plusieurs méthodes d'homogénéisation, ce cours sera consacré à une méthode qui tire partie de la séparation d'échelles en introduisant un petit paramètre  $\varepsilon$  qui est, en gros, le rapport de la taille des hétérogénéités sur celle du milieu. Cette méthode a été développée pour les milieux à hétérogénéités périodiquement distribuées, elle est basée sur des développements asymptotiques en puissances du petit paramètre, dits en double échelle.

A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Amsterdam, North Holland, 1978.

E. Sanchez-Palencia, *Non Homogeneous Media and Vibration Theory*, Lectures Notes in Physics n° 127, Berlin, Springer Verlag, 1980.

J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*, Collection Math. Appli. pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1992.

## Plan

### Modèles linéaires

- Barre élastique - étude de solutions analytiques, méthode heuristique, développement en double échelle
- Conduction thermique stationnaire - développement en double échelle - étude de la loi de Fourier macroscopique
- Elasticité
- Milieux quasi périodiques

### Problèmes non linéaires

- Elasticité en grandes transformations

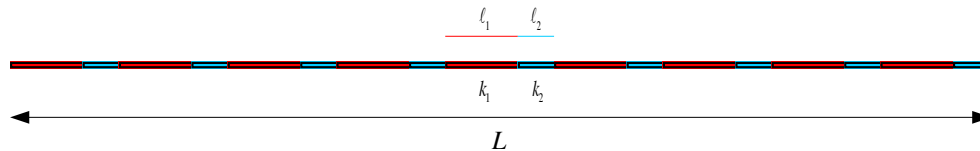
# Modèles linéaires

## Etude explicite d'un cas monodimensionnel

L'étude d'un milieu monodimensionnel finement périodique est intéressante car il est possible de déterminer la solution exacte du problème et d'en étudier, au moins graphiquement, le comportement quand le nombre de périodes augmente. Cela permet également de proposer une méthode heuristique pour déterminer le modèle limite équivalent et d'introduire les développements asymptotiques.

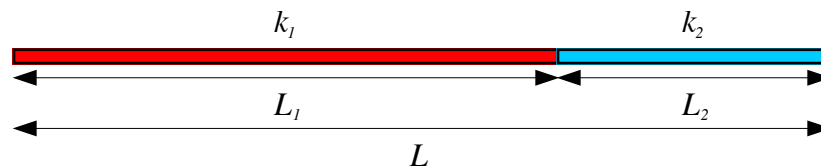
## Présentation du problème

On considère une barre élastique périodique, c'est-à-dire constituée de la juxtaposition régulière de  $N_c$  motifs identiques constitués de deux matériaux homogènes de rigidités équivalentes  $k_1$  et  $k_2$  différentes et de longueurs  $\ell_1$  et  $\ell_2$ . La longueur du motif est  $\ell = \ell_1 + \ell_2$  et la longueur de la barre est  $L = N_c \ell$ .



La barre est donc hétérogène, sa rigidité équivalente est une fonction de  $x$  périodique où  $x$  est la variable repérant les points de la barre.

Une façon de décrire la périodicité de la raideur de la barre, particulièrement utile dans la mise en œuvre des développements asymptotiques, consiste à considérer la fonction  $k(y)$ , périodique sur la droite réelle de période  $L$  :



La cellule dilatée

$$k(y) = \begin{cases} k_1 & 0 < y < L_1 \\ k_2 & L_1 < y < L \end{cases}$$

On vérifie facilement que la raideur de la barre au point  $x$  vaut  $k(N_c x)$



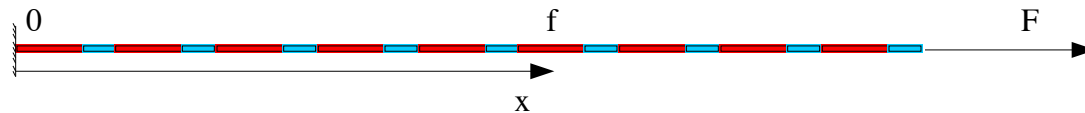
Dans la suite on considère plusieurs barres de même longueur  $L$  constituées d'un nombre  $N_c$  de motifs de base variable mais grand.  $N_c$  étant supposé grand, on introduit le petit paramètre :

$$\epsilon = \frac{1}{N_c}$$

On a donc  $\ell = \epsilon L$ ,  $\ell_1 = \epsilon L_1$  et  $\ell_2 = \epsilon L_2$  et la raideur de la barre au point  $x$  vaut  $k\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ .

On peut voir facilement que la description précédente de la raideur de la barre s'applique aussi au cas où cette raideur, toutefois périodique, n'est pas constante par morceaux. Il suffit de changer la définition de la fonction  $k(y)$  périodique sur  $\mathbb{R}$  de période  $[0, L]$ .

Les propriétés mécaniques de la barre étant précisées, on considère le cas où la barre, fixée en  $x = 0$ , est soumise à une densité  $f$  de force longitudinale et à une force  $F$  au point  $x = L$ .



Chargement de la barre

L'effort normal dans la barre et le déplacement des points de la barre, respectivement notés  $N$  et  $u$  vérifient les équations suivantes :

Equation d'équilibre :

$$\frac{dN}{dx} + f = 0$$

Loi de comportement :

$$N = k \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \frac{du}{dx}$$

Conditions aux limites :

$$u(0) = 0 \text{ et } N(L) = F$$

## Solution analytique

Le problème étant monodimensionnel, il est facile d'en déterminer la solution exacte, afin d'étudier la dépendance de cette solution vis à vis du nombre de motifs dans la barre.

On intègre l'équation d'équilibre en tenant compte des conditions aux limites, ce qui donne :

$$N(x) = \int_x^L f(\xi) d\xi + F$$

le report de cette expression dans la loi de comportement donne :

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{k\left(\frac{x}{\epsilon}\right)} \left( \int_x^L f(\xi) d\xi + F \right)$$

cette équation s'intègre par une autre primitive

Exemples numériques :

On considère différentes situations correspondant aux données géométriques et mécaniques suivantes :

$$L = 2 ; L_1 = 1,4 ; L_2 = 0,6 ; k_1 = 1,5 ; k_2 = 0,562$$

On étudie en premier lieu le cas du chargement  $f = 0$ ,  $F = 2$ .

Raideur globale

Dans ce cas  $N = F$  et, compte tenu de la condition  $u(0) = 0$ , l'intégration de  $\frac{du}{dx} = \frac{N}{k\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}$  sur  $[0, L]$  donne :

$$u(L) = \left( \int_0^L \frac{1}{k\left(\frac{x}{\epsilon}\right)} dx \right) N$$

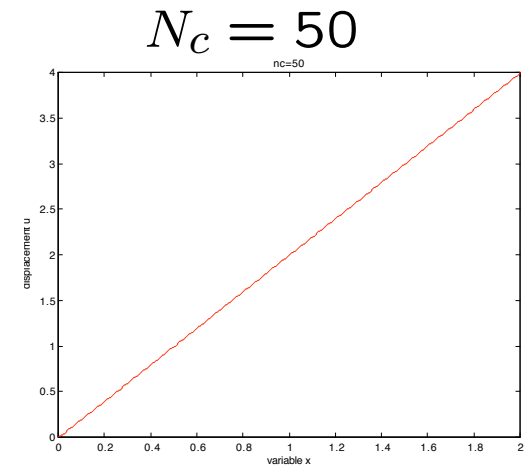
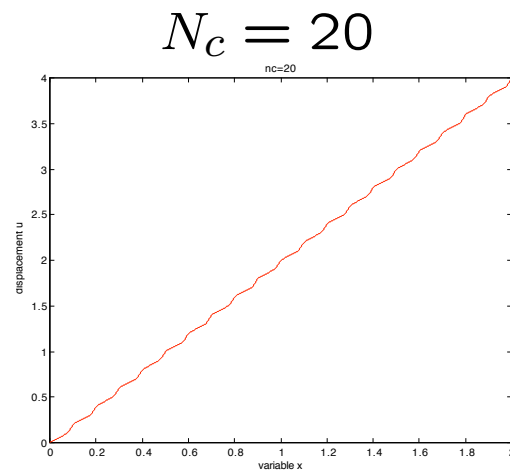
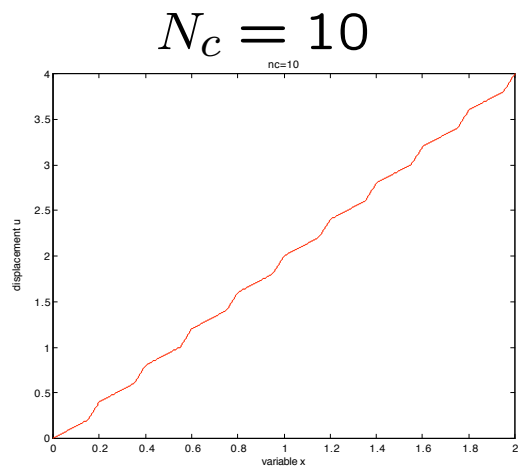
soit, comme  $k\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$  vaut  $k_1$  sur  $N_c$  morceaux de longueurs  $\ell_1$  et  $k_2$  sur  $N_c$  morceaux de longueurs  $\ell_2$  :

$$u(L) = N_c \left( \frac{\ell_1}{k_1} + \frac{\ell_2}{k_2} \right) N = \left( \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} \right) N$$

On en déduit la relation force appliquée/déformation globale  $F = k^G \frac{u(L)}{L}$  où la raideur globale  $k^G$  de la barre est donnée :

$$\frac{1}{k^G} = \frac{1}{L} \left( \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} \right)$$

On considère maintenant les graphiques des solutions analytiques  $x \rightarrow u(x)$  :

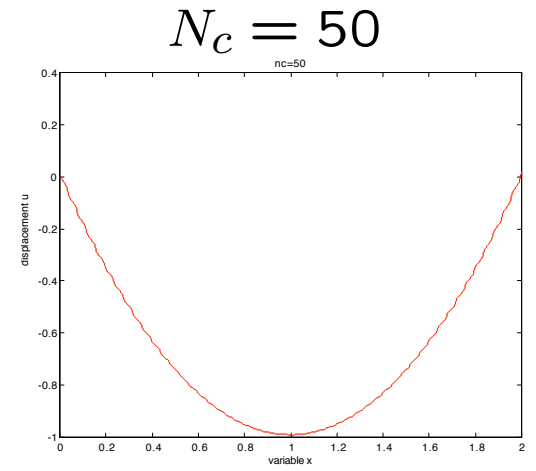
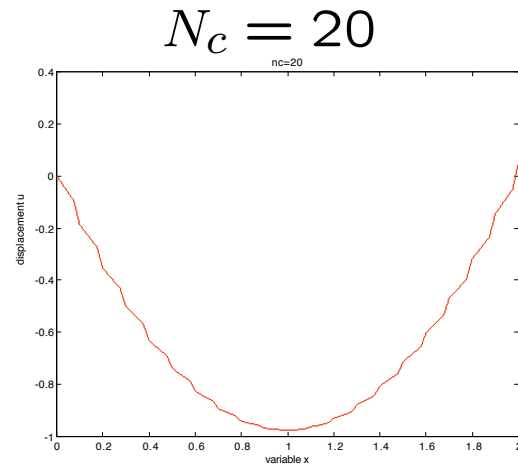
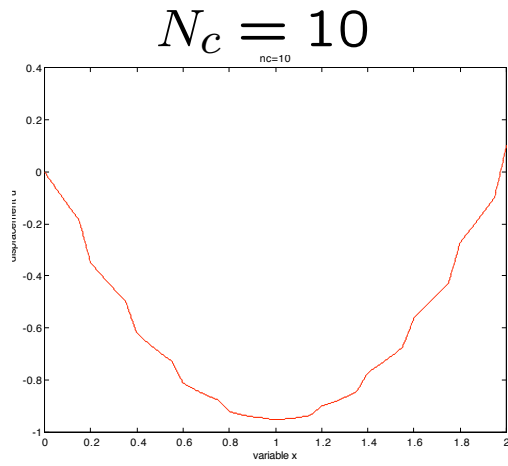


Le graphe du déplacement  $u(x)$  se rapproche d'une droite de pente 2 quand  $N_c$  croît et, pour  $N_c = 50$ , il est très proche de cette droite qui est le graphe du déplacement d'une barre homogène de  $k^G$  et soumise au chargement  $f = 0, F = 2$ .

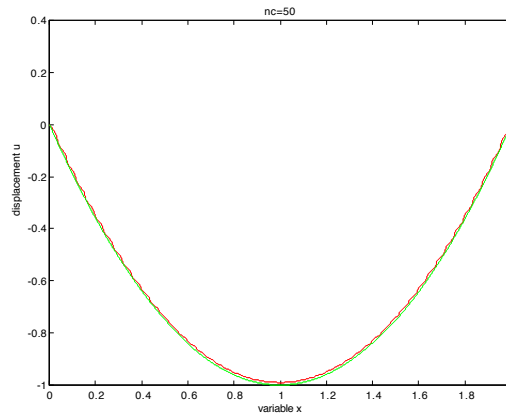
On pourrait penser que la convergence constatée du déplacement vers celui d'une barre homogène de raideur  $k^G$  est liée au fait que la densité de force répartie  $f$  est nulle. En fait il n'en est rien comme le prouve l'étude de des deux autres chargements suivants.



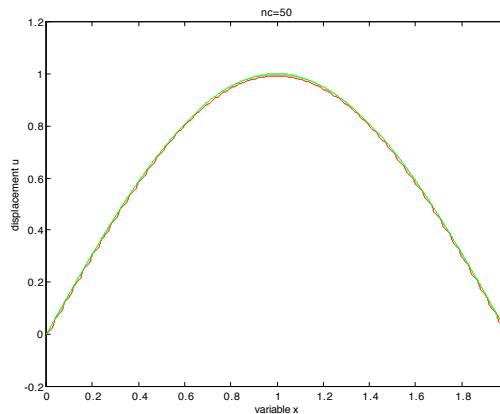
On considère le chargement  $f = -2$ ,  $F = 0$  pour  $N_c = 10, 20$  et  $50$  :



En traçant sur un même graphique les déplacements de la barre hétérogène pour  $N_c = 50$  et de la barre homogène de raideur  $k^G$  soumise au même chargement  $f = -2$ ,  $F = 0$ , on obtient :



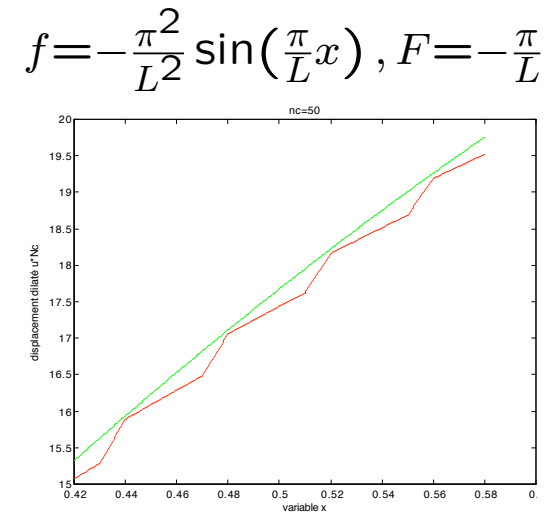
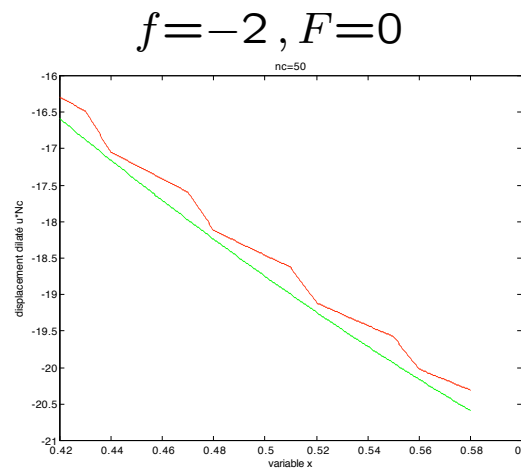
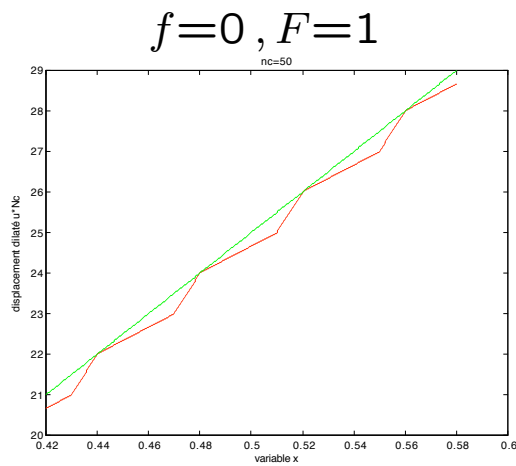
De même, pour un barre de 50 motifs soumise aux efforts  $f = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$ ,  $F = -\frac{\pi}{L}$ , on obtient le graphique comparatif avec le déplacement de la barre homogène de raideur  $k^G$  soumise au même chargement :



Dans les trois cas de forces considérés, on constate « expérimentalement » que pour  $N_c$  assez grand, le champ de déplacement est pratiquement celui d'une barre homogène de raideur  $k^G$ .

## Méthode heuristique

Il est possible de justifier le résultat vérifié « expérimentalement » au paragraphe précédent en utilisant la méthode « heuristique » introduite par E. Sanchez et développée par P. Suquet. Pour introduire cette méthode, on grossit les graphes dans le rapport  $N_c$  autour du point  $x = 0,5$ .



Dans les trois cas de chargement, on constate que la variation du déplacement  $u$  exact (en rouge) sur une période  $(x, x + \ell)$  est pratiquement celle du déplacement limite  $U$  (en vert), c'est-à-dire que :

$$u(x + \ell) - u(x) \simeq \ell \frac{dU}{dx}$$

On peut considérer que pour  $\ell$  petit, l'effort normal sur une période  $(x, x + \ell)$  est à peu près constant, l'intégration de la loi de comportement  $\frac{du}{d\xi} = \frac{N}{k\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right)}$  sur  $(x, x + \ell)$  donne par conséquent :

$$u(x + \ell) - u(x) = N \int_x^{x+\ell} \frac{1}{k\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right)} d\xi$$

ce qui, compte tenu de la condition approchée  $u(x + \ell) - u(x) \simeq \ell \frac{dU}{dx}$ , entraîne :

$$N \int_x^{x+\ell} \frac{1}{k\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right)} d\xi = \ell \frac{dU}{dx}$$

ce qui est la loi de comportement macroscopique :

$$N = k^H \frac{dU}{dx}$$

où la raideur homogénéisée  $k^H$  est donnée par :

$$\frac{1}{k^H} = \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \frac{1}{k\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right)} d\xi$$

on peut noter qu'en raison de la périodicité de la fonction  $k(y)$  la raideur homogénéisée  $k^H$  est indépendante du choix de  $x$ . En utilisant le changement de variables  $\xi = \epsilon y$ , la périodicité de  $k$  et la relation  $\ell = \epsilon L$ , on montre que :

$$\frac{1}{k^H} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{k(y)} dy$$

Dans le cas considéré où la raideur  $k(y)$  est constante par morceaux, on vérifie facilement que :

$$\frac{L}{k^H} = \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}$$

La raideur  $k^H$  est bien égale à la raideur globale  $k^G$  du problème pour  $f = 0$  qui a servi à « intuiter », par analogie avec le cas  $f = 0$ , les solutions limites construites pour les deux autres chargements  $f = -2$ ,  $F = 0$  et  $f = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$ ,  $F = -\frac{\pi}{L}$ .



## Développements en double échelle

On a vu au paragraphe précédent que pour un nombre de périodes  $N_\epsilon$  grand, le déplacement de la barre hétérogène sous un chargement donné est proche de celui d'une barre homogène sous le même chargement. L'approximation du déplacement de la barre hétérogène par celui de la barre homogène est d'autant meilleure que  $\epsilon$  est petit.

On peut donc considérer que le déplacement  $U$  de la barre homogène est la limite quand  $\epsilon \rightarrow 0$  du déplacement de la barre hétérogène et « homogénéiser » revient à faire tendre  $\epsilon$  vers 0.

Il faut souligner que l'homogénéisation qui consiste à faire tendre  $\epsilon$  vers 0 revient à considérer une suite de structures à hétérogénéités de plus en plus fines or, dans la pratique, le résultat obtenu va être appliqué à une structure ayant un nombre fini  $N_c$  de périodes.

Comme dans la plupart des processus asymptotiques, la construction de la suite de structures est une « expérience de pensée », il n'y a qu'une structure réelle comportant un nombre fini de périodes et la question de l'applicabilité du résultat à cette structure se pose.

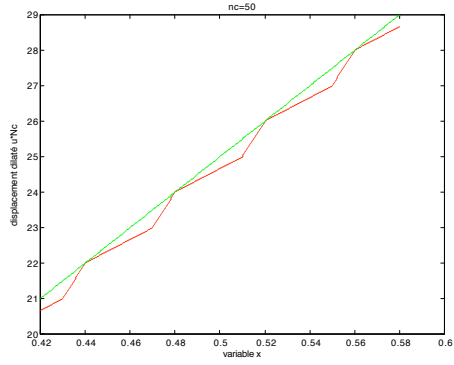
Cette question n'est, en général, pas cruciale dans le cas d'une homogénéisation simple mais dans un certain nombre de problèmes, structure mince finement périodique, écoulement d'un fluide visqueux dans un milieu poreux, . . . plusieurs petits paramètres peuvent apparaître et le problème limite peut dépendre plus ou moins fortement des ordres de grandeur respectifs de ces paramètres. La question se pose alors de déterminer le problème limite le mieux adapté au problème considéré.

L'étude de la limite quand  $\epsilon \rightarrow 0$  du déplacement de la barre hétérogène, revient donc à considérer une suite de barres de même longueur soumise au même chargement. Les déplacements ainsi que les tensions dans ces barres dépendent du paramètre  $\epsilon$  et sont notés  $u^\epsilon$  et  $N^\epsilon$ . La détermination des limites pour  $\epsilon \rightarrow 0$  de ces quantités est une étude asymptotique qui peut se faire soit en prouvant une convergence, soit en construisant un développement asymptotique de  $u^\epsilon$  et  $N^\epsilon$  vis à vis de  $\epsilon$ .

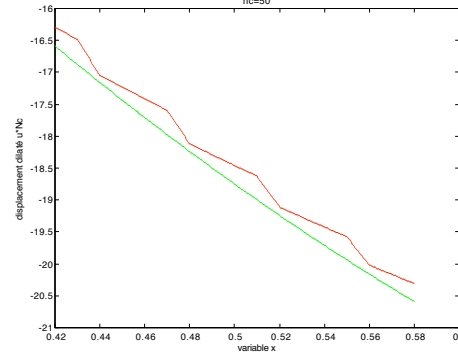
Le développement considéré est en puissances de  $\epsilon$ , il est appelé développement en double échelle.

Les 5 zooms suivants (3 avec  $N_C = 50$  et 2 avec  $N_c = 100$ ) :

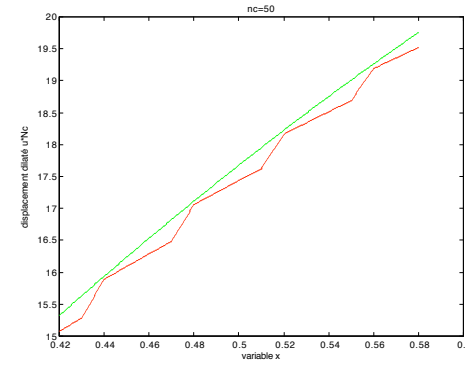
$$f=0, F=1$$



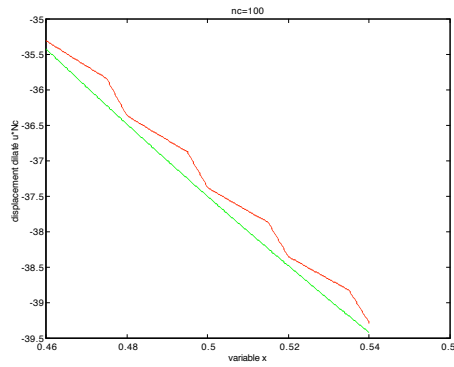
$$f=-2, F=0$$



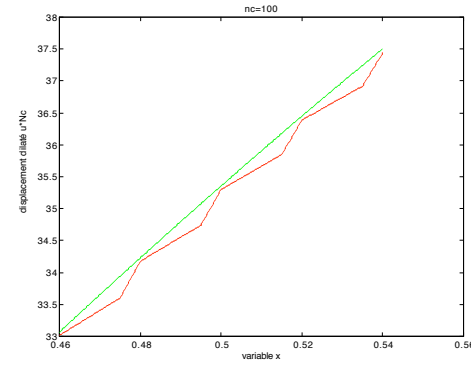
$$f=-\frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right), F=-\frac{\pi}{L}$$



$$f=-2, F=0$$



$$f=-\frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right), F=-\frac{\pi}{L}$$



montrent que l'écart entre la solution exacte  $u$  et la solution limite  $U$  est une perturbation qui est d'ordre  $\frac{1}{N_c} = \epsilon$  et que cette perturbation est, au moins localement, périodique de période  $\ell$ . Ce qu'on peut écrire localement :

$$u(x) \simeq U(x) + \epsilon v(x)$$

où  $v$  est une fonction localement périodique de période  $\ell$ .

Cette approximation est un début de développement qu'on généralise et systématise sous la forme :

$$u^\epsilon(x) = u^{(0)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon u^{(1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 u^{(2)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

où les fonctions  $u^{(n)}(x, y)$  sont  $y$ -périodiques de période  $Y$ .

Ce développement est appelé développement en double échelle parce qu'il fait apparaître deux échelles de variation de  $u^\epsilon$  en effet une variation de  $x$  de l'ordre de  $\epsilon$  entraîne des variations d'ordre  $\epsilon$  des  $u^{(n)}(x, y)$  relativement à la première variable mais d'ordre 1 relativement à la seconde variable.  $x$  est appelée variable de grande échelle et  $y$  variable de petite échelle.

Soient  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x} + \epsilon L$  deux points de la barre élastique homologues par périodicité, d'après le développement

$$u^\epsilon(x) = u^{(0)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon u^{(1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 u^{(2)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

on a :

$$u^\epsilon(\tilde{x}) = u^{(0)}(\tilde{x}) + \epsilon u^{(1)}\left(\tilde{x}, \frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 (\dots)$$

$$u^\epsilon(\tilde{x} + \epsilon L) = u^{(0)}(\tilde{x} + \epsilon L) + \epsilon u^{(1)}\left(\tilde{x} + \epsilon L, \frac{\tilde{x}}{\epsilon} + L\right) + \epsilon^2 (\dots)$$

Soit, compte-tenu de la périodicité des fonctions  $u^{(n)}$  et en utilisant des développements de Taylor :

$$u^\epsilon(\tilde{x} + \epsilon L) = u^{(0)}(\tilde{x}) + \epsilon \left( u^{(1)}\left(\tilde{x}, \frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) + \frac{du^{(0)}}{dx}(\tilde{x}) L \right) + \epsilon^2 (\dots)$$



et par différence :

$$u^\epsilon(\tilde{x} + \epsilon L) - u^{(0)}(\tilde{x}) = \epsilon \frac{du^{(0)}}{dx}(\tilde{x}) L + \epsilon^2 (\dots)$$

On retrouve, à l'ordre  $\epsilon^2$  près l'égalité :

$$u^\epsilon(\tilde{x} + \epsilon L) - u^{(0)}(\tilde{x}) = \epsilon \frac{du^{(0)}}{dx}(\tilde{x}) L$$

qui a servi dans la méthode heuristique.

Revenons aux développements asymptotiques. Par dérivation de :

$$u^\epsilon(x) = u^{(0)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon u^{(1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 u^{(2)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

il vient :

$$\begin{aligned} \frac{du^\epsilon}{dx} &= \frac{1}{\epsilon} \frac{du^{(0)}}{dy}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{du^{(0)}}{dx}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{du^{(1)}}{dy}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \\ &+ \epsilon \left( \frac{du^{(1)}}{dx}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{du^{(2)}}{dy}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \right) + \dots \end{aligned}$$

ce qui, reporté dans la loi de comportement, montre que l'effort normal  $N^\epsilon$  se développe en :

$$N^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} N^{(-1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + N^{(0)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon N^{(1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 N\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

où les  $N^{(n)}(x, y)$  sont  $y$ -périodiques de période  $Y$ .

Le développement de la loi de comportement  $N = k \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \frac{du}{dx}$  s'écrit :

$$\frac{1}{\epsilon} N^{(-1)} + N^{(0)} + \epsilon N^{(1)} + \dots = k \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{du^{(0)}}{dy} + \frac{du^{(0)}}{dx} + \frac{du^{(1)}}{dy} \right) + \dots$$

et, par identification des termes de même puissance de  $\epsilon$ , on obtient pour tout  $x$  et pour tout  $y$  :

$$\begin{aligned} N^{(-1)} &= k(y) \frac{du^{(0)}}{dy} \\ N^{(0)} &= k(y) \left( \frac{du^{(0)}}{dx} + \frac{du^{(1)}}{dy} \right) \\ N^{(1)} &= k(y) \left( \frac{du^{(1)}}{dx} + \frac{du^{(2)}}{dy} \right) \\ &\dots \end{aligned}$$

Par dérivation du développement de  $N$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dN^\epsilon}{dx} = & \frac{1}{\epsilon^2} \frac{dN^{(-1)}}{dy} + \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{dN^{(-1)}}{dx} + \frac{dN^{(0)}}{dy} \right) + \frac{dN^{(0)}}{dx} + \frac{dN^{(1)}}{dy} \\ & + \epsilon \left( \frac{dN^{(1)}}{dx} + \frac{dN^{(2)}}{dy} \right) + \dots \end{aligned}$$

Le développement de l'équation d'équilibre donne :

$$\begin{aligned} \frac{dN^{(-1)}}{dy} &= 0 \\ \frac{dN^{(-1)}}{dx} + \frac{dN^{(0)}}{dy} &= 0 \\ \frac{dN^{(0)}}{dx} + \frac{dN^{(1)}}{dy} + f &= 0 \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

De l'équation  $\frac{dN^{(-1)}}{dy} = 0$  on déduit que  $N^{(-1)}$  ne dépend pas de  $y$  (ce qui est évidemment compatible avec la périodicité en  $y$ ). L'équation  $N^{(-1)} = k(y) \frac{du^{(0)}}{dy}$  s'intègre alors en :

$$u^{(0)}(x, y) = N^{(-1)}(x) \int_0^y \frac{1}{k(\zeta)} d\zeta + \bar{u}^{(0)}(x)$$

où  $\bar{u}^{(0)}$  est une constante d'intégration pour l'équation différentielle en  $y$ , c'est-à-dire une fonction de la variable de grande échelle  $x$  seule.

La condition de périodicité  $u^{(0)}(x, L) = u^{(0)}(x, 0)$  est équivalente à :

$$N^{(-1)} \int_0^L \frac{1}{k(\zeta)} d\zeta = 0$$

ce qui, comme  $k$  est strictement positif, entraîne :

$$N^{(-1)} = 0$$

et

$$u^{(0)}(x, y) = \bar{u}^{(0)}(x)$$

c'est-à-dire que  $u^{(0)}$  ne dépend que de la variable de grande échelle  $x$ .

*Remarque 1.* Le terme dominant  $u^{(0)}$  du développement

$$u^\epsilon(x) = u^{(0)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon u^{(1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 u^{(2)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

est le déplacement du milieu macroscopique équivalent, il ne dépend que de la variable de grande échelle  $x$  ce qui correspond bien avec l'idée d'homogénéisation qui gomme les variations à petite échelle du déplacement.

Pour obtenir les équations « macroscopiques » satisfaites par  $u^{(0)}$ , il faut poursuivre l'exploitation des équations trouvées par développement. On a :

$$\frac{dN^{(-1)}}{dx} + \frac{dN^{(0)}}{dy} = 0$$

Compte tenu de la nullité de  $N^{(-1)}$ ,  $N^{(0)}$  ne dépend pas de  $y$ . L'intégration sur  $[0, L]$  de  $N^{(0)} = k(y) \left( \frac{du^{(0)}}{dx} + \frac{du^{(1)}}{dy} \right)$  réécrite :

$$\frac{du^{(0)}}{dx} + \frac{du^{(1)}}{dy} = \frac{1}{k(y)} N^{(0)}$$

donne alors, en tenant compte de la périodicité de  $u^{(1)}$  et de l'indépendance de  $u^{(0)}$  vis à vis de  $y$  :

$$L \frac{du^{(0)}}{dx} = N^{(0)} \int_0^L \frac{1}{k(\zeta)} d\zeta$$



Ce qu'on peut écrire :

$$N^{(0)} = k^H \frac{du^{(0)}}{dx}$$

avec, dans le cas considéré où  $k$  est constante par morceaux :

$$\frac{L}{k^H} = \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}$$

Cette loi de comportement macroscopique est exactement la loi trouvée par la méthode heuristique.

Pour déterminer l'équation d'équilibre vérifiée par  $N^{(0)}$ , on intègre l'équation  $\frac{dN^{(0)}}{dx} + \frac{dN^{(1)}}{dy} + f = 0$  sur  $[0, L]$ , ce qui donne, compte tenu de la périodicité de  $N^{(1)}$  :

$$\frac{dN^{(0)}}{dx} + \langle f \rangle = 0$$

où la moyenne  $\langle f \rangle$  de  $f$  est définie par :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L f(y) dy$$

La méthode asymptotique a ainsi permis de déterminer le modèle macroscopique équivalent de la barre finement hétérogène constitué de la loi de comportement homogénéisée et de l'équation d'équilibre macroscopique.

Elle donne aussi une approximation  $N^{(0)}$  à l'ordre 0 de l'effort normal  $N$ .

La méthode asymptotique est applicable en dynamique à condition que les longueurs d'onde des phénomènes dynamiques soient grandes devant la taille des périodes.

## Convergence

Les résultats des développements asymptotiques en double échelle du paragraphe restent formels le temps qu'une convergence n'a pas été prouvée. Plusieurs méthodes de convergence ont été appliquées à l'homogénéisations des milieux périodiques, *G-convergence*, *méthode dite « de Tartar »*,  $\Gamma$ -*convergence*, *H-convergence*, *convergence à deux échelles*, *méthode par éclatement*.

## Exercices

Poursuivre le développement, c'est-à-dire déterminer  $u^{(1)}$  et les termes suivants.

Appliquer la méthode des développements asymptotiques à une poutre droite dont les équations sont :

$$\frac{dT}{dx} + p = 0$$
$$\frac{dM}{dx} - T = 0$$

$$M = EI \frac{d\theta}{dx}$$

avec, soit la condition de Navier Bernouilli

$$\theta + \frac{dw}{dx} = 0$$

soit la loi de comportement de Timoshenko portant sur l'effort tranchant  $T$  :

$$T = GA_e \left( \theta + \frac{dw}{dx} \right)$$

où  $E$  et  $G$  sont le module d'Young et le module de cisaillement du matériau,  $I$  et  $A_e$  sont l'inertie et une aire « équivalente » de la section droite de la poutre.

Etude d'un problème de conduction thermique stationnaire

On généralise dans cette partie les méthodes d'homogénéisation (heuristique et développement asymptotique) à un problème bidimensionnel. Le domaine choisi est celui de la conduction thermique stationnaire qui est formellement plus simple que l'élastostatique puisque l'inconnue primale, le champ de température, est scalaire alors qu'en élastostatique le champ de déplacement est vectoriel mais l'extension à l'élastoplasticité ne pose aucun problème.

Conduction stationnaire de la chaleur

$\vec{q}$  et  $\theta$  désignant respectivement les champs de flux de chaleur et de température et  $f$  une densité surfacique (volumique pour un cas tridimensionnel) d'apport de chaleur, les les équations régissant la conduction stationnaire de la chaleur dans un domaine bidimensionnel  $\Omega$  sont :

$$\operatorname{div} \vec{q} + f = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\vec{q} = -K \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta \text{ dans } \Omega$$

+ conditions aux limites non précisées

où l'application linéaire  $K$  est le tenseur de conductivité thermique,  $K$  est symétrique.



L'équation  $\text{div} \vec{q} + f = 0$  traduit la conservation de la chaleur dans le cas stationnaire (pas de variation temporelle de la température), l'équation  $\vec{q} = -K \overrightarrow{\text{grad}} \theta$  dans  $\Omega$  qui relie le flux de chaleur  $\vec{q}$  au gradient  $\overrightarrow{\text{grad}} \theta$  de température est appelée loi de Fourier de la conduction de la chaleur. Le milieu est dit isotrope si le tenseur  $K$  est simplement un multiple de l'identité  $\mathbb{I}$ , c'est-à-dire  $K = k\mathbb{I}$ , dans ce cas la loi de Fourier s'écrit :

$$\vec{q} = -k \overrightarrow{\text{grad}} \theta$$

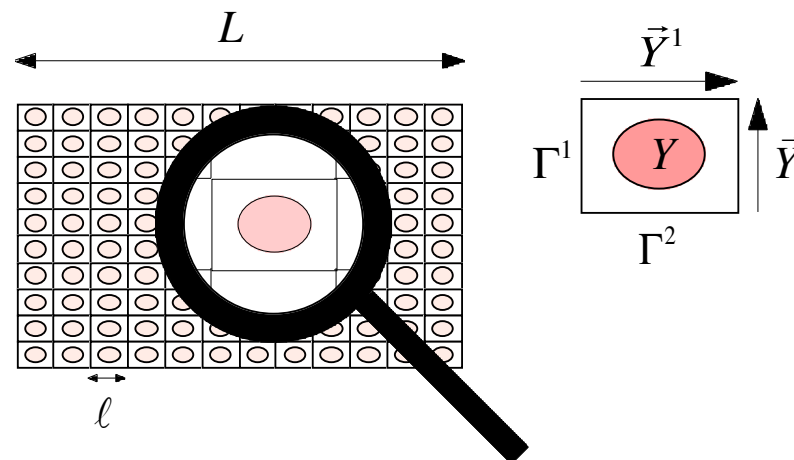
En notation indicielle les équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \partial_i^x q_i + f &= 0 \text{ dans } \Omega \\ q_i &= -K_{ij} \partial_j^x \theta \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

où  $\partial_i^x$  désigne la dérivée partielle  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  et où la convention de sommation d'Einstein est utilisée.

## Description du milieu périodique

Dans le cadre de l'homogénéisation, le milieu qu'on considère est périodiquement et finement hétérogène, c'est-à-dire que le tenseur des conductions thermique  $K$  dépend périodiquement de la variable d'espace  $\vec{x}$  et que la taille  $\ell$  d'une période est petite devant une dimension caractéristique  $L$  du domaine  $\Omega$ .



Le milieu périodique et la cellule de référence  $Y$

En procédant comme pour le milieu monodimensionnel, on définit la dépendance spatiale du tenseur de conductivité thermique en considérant une fonction  $K(\vec{y})$  définie sur la cellule  $Y$  et prolongée à tout le plan par périodicité et en posant :

$$K^\epsilon(\vec{x}) = K\left(\frac{\vec{x}}{\epsilon}\right)$$

où  $\epsilon$  est le petit paramètre égal à  $\ell/L$  pour le milieu considéré et destiné à tendre vers 0 dans le processus d'homogénéisation.

Les équations considérées pour l'étude de l'homogénéisation sont :

$$\operatorname{div} \vec{q}^\epsilon + f = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\vec{q}^\epsilon = -K^\epsilon(\vec{x}) \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta^\epsilon \text{ dans } \Omega$$

+ conditions aux limites non précisées

où :

$$K^\epsilon(\vec{x}) = K \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \epsilon \end{pmatrix}$$

$K(\vec{y})$  étant défini sur la cellule  $Y$ .

Méthode heuristique

Exercice : Généraliser et appliquer au problème de thermique bidimensionnel la méthode heuristique utilisée pour la barre 1D.

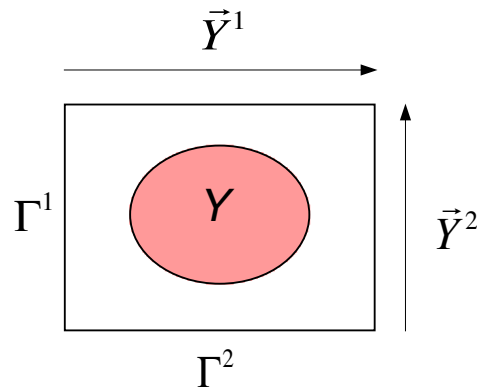
Développement asymptotique

$$\theta^\epsilon(\vec{x}) = \theta^{(0)}(\vec{x}) + \epsilon\theta^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2\theta^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots$$

où les  $\theta^{(n)}(\vec{x}, \vec{y})$  sont  $y$ -périodiques de période  $Y$  :

$$\forall \vec{y} \in \Gamma^i, \theta^{(n)}(\vec{x}, \vec{y}) = \theta^{(n)}(\vec{x}, \vec{y} + \vec{Y}^i), \quad i = 1, 2$$

où  $\Gamma^1$  et  $\Gamma^2$  désignent respectivement les bords gauche et droit de la cellule  $Y$  :



On écrit aussi la relation précédente :

$$[[\theta^{(n)}]]^i = 0, \quad i = 1, 2$$

où  $[[\eta]]^1$  et  $[[\eta]]^2$  sont les fonctions définies par :

$$\forall \vec{y} \in \Gamma^i, [[\eta]]^i = \eta(\vec{y} + \vec{Y}^i) - \eta(\vec{y})$$

*Remarque 2.* Le premier terme  $\theta^{(0)}(\vec{x})$  du développement a été choisi a priori indépendant de la variable de petite échelle  $\vec{y}$ , en fait cette hypothèse n'est pas indispensable, on peut le prendre comme les autres  $\theta^{(n)}$  dépendant des deux variables, c'est-à-dire de la forme  $\theta^{(0)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right)$  et montrer qu'il ne dépend que de la variable de grande échelle, c'est ce qui a été fait pour le développement du cas monodimensionnel.

Par dérivation de :

$$\theta^\epsilon(\vec{x}) = \theta^{(0)}(\vec{x}) + \epsilon \theta^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 \theta^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots$$

il vient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \theta^\epsilon = \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(1)} + \epsilon \left( \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(1)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(2)} \right) + \dots$$

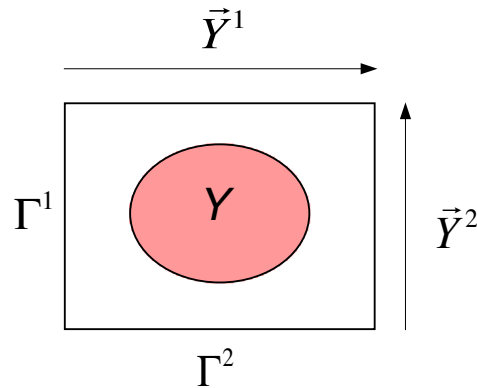


d'après la loi de Fourier  $\vec{q}^\epsilon = -K^\epsilon(\vec{x}) \overrightarrow{\text{grad}} \theta^\epsilon$ , on a :

$$\vec{q}^\epsilon(\vec{x}) = \vec{q}^{(0)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon \vec{q}^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 \vec{q}^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots$$

où les  $\vec{q}^{(n)}(\vec{x}, \vec{y})$  sont  $y$ -périodiques de période  $Y$ . Ce qui entraîne :

$$\forall \vec{y} \in \Gamma_i, \vec{q}^{(n)}(\vec{x}, \vec{y} + \vec{Y}_i) \cdot \vec{n} = -\vec{q}^{(n)}(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \vec{n}, \quad i = 1, 2$$



Par dérivation, on obtient :

$$\operatorname{div} \vec{q}^\epsilon(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}^y \vec{q}^{(0)} + \operatorname{div}^x \vec{q}^{(0)} + \operatorname{div}^y \vec{q}^{(1)} + \epsilon \left( \operatorname{div}^x \vec{q}^{(1)} + \operatorname{div}^y \vec{q}^{(2)} \right) + \dots$$

Le développement de l'équation de conservation de la chaleur

$\operatorname{div} \vec{q}^\epsilon + f = 0$  s'écrit :

$$\frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}^y \vec{q}^{(0)} + \operatorname{div}^x \vec{q}^{(0)} + \operatorname{div}^y \vec{q}^{(1)} + \epsilon \left( \operatorname{div}^x \vec{q}^{(1)} + \operatorname{div}^y \vec{q}^{(2)} \right) + \dots + f = 0$$

d'où en identifiant les termes de même puissance de  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^y \vec{q}^{(0)} &= 0 \\ \operatorname{div}^x \vec{q}^{(0)} + \operatorname{div}^y \vec{q}^{(1)} + f &= 0 \\ \operatorname{div}^x \vec{q}^{(1)} + \operatorname{div}^y \vec{q}^{(2)} &= 0 \\ \dots &= 0 \end{aligned}$$

L'identification terme à terme du développement de la loi de Fourier  $\vec{q}^\epsilon = -K^\epsilon(\vec{x}) \otimes \overrightarrow{\text{grad}} \theta^\epsilon$  donne :

$$\vec{q}^{(0)} = -K \otimes (\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(1)})$$

$$\vec{q}^{(1)} = -K \otimes (\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(1)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(2)})$$

.....

Equation de conservation macroscopique

Par intégration sur  $Y$  de  $\operatorname{div}^x \vec{q}^{(0)} + \operatorname{div}^y \vec{q}^{(1)} + f = 0$ , il vient :

$$\int_Y \operatorname{div}^x \vec{q}^{(0)} ds^y + \int_{\partial Y} \vec{q}^{(1)} \cdot \vec{n} dl^y + f |Y| = 0$$

soit, comme  $\vec{q}^{(1)} \cdot \vec{n}$  prend des valeurs opposées sur les faces opposés de  $\partial Y$  :

$$\int_Y \operatorname{div}^x \vec{q}^{(0)} ds^y + f |Y| = 0$$

En intervertissant la divergence par rapport à  $\vec{x}$  et l'intégrale sur  $Y$  et en divisant par  $|Y|$ , on obtient :

$$\operatorname{div}^x \langle \vec{q}^{(0)} \rangle + f = 0$$

où la moyenne  $\langle g \rangle$  sur  $Y$  d'une fonction  $g$  définie sur  $Y$  est définie par :

$$\langle g \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y g(\vec{y}) ds^y$$

*Remarque 3.* On peut remarquer que l'interversion de la dérivation par rapport à  $\vec{x}$  et de l'intégrale sur  $Y$  qui mène à l'équation de conservation macroscopique est possible car la cellule  $Y$  ne dépend pas de  $\vec{x}$ . Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe consacré aux milieux quasi périodiques.

## Loi de Fourier macroscopique

Dans le cas de la barre 1D, comme l'effort normal  $N^{(0)}$  est constant, il a été possible de déterminer la loi de comportement homogénéisée sans avoir à déterminer le terme  $u^{(1)}$ . Dans le cas bidimensionnel de thermique considéré, la détermination de la loi de Fourier macroscopique passe par la résolution d'un problème pour  $\theta^{(1)}$  et  $\vec{q}^{(0)}$  posé sur la cellule  $Y$ .

Problème pour  $\theta^{(1)}$  et  $\vec{q}^{(0)}$  sur  $Y$

Etant donné  $\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$ , trouver  $\theta^{(1)}(\vec{x}, \vec{y})$  et  $\vec{q}^{(0)}(\vec{x}, \vec{y})$  définis sur  $Y$  tel que :

$$\text{div}^y \vec{q}^{(0)} = 0$$

$$\vec{q}^{(0)} = -K(\vec{y}) \otimes \left( \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(1)} \right)$$

$\theta^{(1)}$  égal sur les bords opposés de  $\partial Y$

$\vec{q}^{(0)} \cdot \vec{n}$  opposés sur les bords opposés de  $\partial Y$

On peut montrer que ce problème admet une solution  $\theta^{(1)}$  définie à une constante près, c'est-à-dire ici à une fonction de  $\vec{x}$  près.

Ce problème résolu, on obtient la loi de Fourier par intégration :

$$\langle \vec{q}^{(0)} \rangle = -\frac{1}{|Y|} \int_Y \left( K(\vec{y}) \otimes \left( \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(1)} \right) \right) ds^y$$

Lien avec la méthode heuristique

On pose :

$$\tilde{\theta}^{(1)} = \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} \cdot \vec{y} + \theta^{(1)}$$

d'où :

$$\overrightarrow{\text{grad}}^y \tilde{\theta}^{(1)} = \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(1)}$$

$$\vec{q}^{(0)} = -K(\vec{y}) \odot \overrightarrow{\text{grad}}^y \tilde{\theta}^{(1)}$$

$$\left[ \left[ \tilde{\theta}^{(1)} \right] \right]^i = \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} \cdot \vec{Y}^i, \quad i = 1, 2$$



Dans le cas étudié où la loi de Fourier est linéaire,  $\theta^{(1)}$  dépend linéairement de  $\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$ , c'est-à-dire :

$$\theta^{(1)} = \vec{\chi}(\vec{y}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \bar{\theta}^{(1)}(\vec{x})$$

où la fonction vectorielle  $\vec{\chi}(\vec{y})$  est solution du problème :

$$\text{div}^y Q^T = 0$$

$$Q = -K \circ (\mathbb{I} + (\nabla^y \vec{\chi})^T)$$

$\vec{\chi}$  égal sur les bords opposés de  $\partial Y$

$Q^T \otimes \vec{n}$  opposés sur les bords opposés de  $\partial Y$

et où  $\bar{\theta}^{(1)}$  est une fonction de  $\vec{x}$  seul.

Le champ de vecteurs  $\vec{\chi}$  n'est pas défini de façon unique, on peut montrer qu'il est défini à un vecteur additif près ce qui fait que son gradient  $\nabla^y \vec{\chi}$  est, lui, défini de façon unique. Pour déterminer complètement  $\vec{\chi}$ , il faut ajouter une équation vectorielle qui fixe le vecteur d'indétermination, une façon de faire est d'imposer :

$$\int_Y \vec{\chi} ds^y = 0$$

On peut écrire :

$$\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T = \nabla^y (\vec{y} + \vec{\chi})^T$$

et, en posant :

$$\vec{\tilde{\chi}} = \vec{y} + \vec{\chi}$$

le problème sur  $Y$  devient :

$$\operatorname{div}^y Q^T = 0$$

$$Q = -K \circ \nabla^y \vec{\tilde{\chi}}^T$$

$$[[\vec{\tilde{\chi}}]]^i = \vec{Y}^i \text{ sur } \Gamma^i, i = 1, 2$$

$Q^T \circ \vec{n}$  opposés sur les bords opposés de  $\partial Y$

Version « indicielle »

En utilisant la notation indicielle des vecteurs, le problème s'écrit :

Etant donné  $\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$ , trouver  $\theta^{(1)}(\vec{x}, \vec{y})$  défini  $Y$  tel que :

$$\partial_i^y q_i^{(0)} = 0$$

$$q_i^{(0)} = -K_{ij}(\vec{y}) \left( \partial_j^x \theta^{(0)} + \partial_j^y \theta^{(1)} \right)$$

$\theta^{(1)}$  égal sur les bords opposés de  $\partial Y$

$q_i^{(0)} n_i$  opposés sur les bords opposés de  $\partial Y$

On écrit que  $\theta^{(1)}$  dépend linéairement des composantes  $\partial_k^x \theta^{(0)}$  de  $\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$ , c'est-à-dire :

$$\theta^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) = \chi_k(\vec{y}) \partial_k^x \theta^{(0)} + \bar{\theta}^{(1)}(\vec{x})$$

En gardant les fonctions  $\chi_k$  comme inconnues (et non le vecteur  $\vec{\chi}$ , on peut récrire le problème sous la forme vectorielle :

$$\operatorname{div} \vec{\tau}^k = 0$$

$$\vec{\tau}^k = -K \overrightarrow{\operatorname{grad}}^y (y_k + \chi_k)$$

$\chi_k$  égal sur les bords opposés de  $\partial Y$

$\vec{\tau}^k \cdot \vec{n}$  opposés sur les bords opposés de  $\partial Y$

**Exercice 4.** En imposant les conditions rendant la détermination de  $\vec{\chi}$  et des  $\chi_k$  unique, vérifier que  $\vec{\chi} = \chi_k \vec{e}_k$ , c'est-à-dire que les  $\chi_k$  sont les composantes de  $\vec{\chi}$  sur la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  utilisée pour l'écriture indicielle des tenseurs et que  $Q = \tau_i^k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k$ .

Tenseur de conductivité thermique homogénéisé

De  $\theta^{(1)} = \vec{\chi}(\vec{y}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \bar{\theta}^{(1)}(\vec{x})$ , on déduit  $\vec{q}^{(0)} = Q \otimes \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$

où  $Q = -K \circ (\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T)$ . En moyennant sur  $Y$ , on obtient :

$$\langle \vec{q}^{(0)} \rangle = \langle Q \rangle \otimes \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$$

qu'on écrit :

$$\langle \vec{q}^{(0)} \rangle = -K^H \otimes \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$$

où le tenseur de conductivité thermique homogénéisé  $K^H$  est donné par :

$$K^H = -\langle Q \rangle$$

soit :

$$K^H = \langle K \circ (\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T) \rangle$$

Version « indicielle »

En prenant la moyenne sur  $Y$  de  $q_i^{(0)} = -K_{ij} (\delta_{jk} + \partial_j^y \chi_k) \partial_k^x \theta^{(0)}$ ,  
on obtient :

$$\langle q_i^{(0)} \rangle = - \langle K_{ij} (\delta_{jk} + \partial_j^y \chi_k) \rangle \partial_k^x \theta^{(0)}$$

La loi de Fourier macroscopique peut donc s'écrire :

$$\langle q_i^{(0)} \rangle = -K_{ij}^H \partial_j^x \theta^{(0)}$$

où le tenseur de conductivité thermique homogénéisé  $K_{ij}^H$  est :

$$K_{ik}^H = \langle K_{ij} (\delta_{jk} + \partial_j^y \chi_k) \rangle$$

## Exercices

- Reprendre l'étude asymptotique en partant du développement de  $\theta^\epsilon$  dans lequel le premier terme est supposé dépendre des deux variables de grande et de petite échelles, c'est-à-dire de la forme :

$$\theta^\epsilon(\vec{x}) = \theta^{(0)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon\theta^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2\theta^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots$$

- Milieu stratifié

Homogénéiser un milieu stratifié constitué de la répétition périodique dans la direction  $x_2$  de deux matériaux de conductivité thermique isotrope  $k_1$  et  $k_2$  et d'épaisseurs  $\ell_1 = \epsilon L_1$  et  $\ell_2 = \epsilon L_2$ .

- Homogénéiser un milieu périodique constitué d'un milieu homogène contenant des inclusions disjointes de conductivité très élevée, dans lesquelles la température est constante.



## Formulations variationnelles

Dans ce paragraphe on établit les formulations variationnelles des problèmes posés sur la cellule  $Y$  en partant des différentes formulations faibles établies à l'annexe.

Ces formulations variationnelles sont le point de départ de la résolution par éléments finis, elles permettent d'établir des résultats mathématiques d'existence et d'unicité ainsi que les propriétés de symétrie des lois homogénéisées.

Formulation variationnelle pour  $\theta^{(1)}$

La formulation faible de  $\text{div}^y \vec{q}^{(0)} = 0$  et  $\vec{q}^{(0)} \cdot \vec{n}$  opposés sur les bords opposés de  $Y$  s'écrit :

$$\forall \eta \text{ périodique, } - \int_Y \vec{q}^{(0)} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \, ds^y = 0$$

en reportant l'équation  $\vec{q}^{(0)} = -K(\vec{y}) \otimes (\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(1)})$  dans la formulation précédente, on obtient la formulation variationnelle du problème qui est :

Trouver  $\theta^{(1)}$  périodique tel que :

$$\forall \eta \text{ périodique, } \int_Y \left( K \otimes (\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(1)}) \right) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \, ds^y = 0$$

Formulation variationnelle pour  $\tilde{\theta}^{(1)} = \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} \cdot \vec{y} + \theta^{(1)}$

La formulation faible pour  $\vec{q}^{(0)}$  s'écrit aussi :

$$\forall \eta, [[\eta]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \int_Y \vec{q}^{(0)} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \, ds^y = \sum_{i=1,2} \left( [[\eta]]^i \vec{N}^i \right) \cdot \langle \vec{q}^{(0)} \rangle$$

où  $\vec{N}^i = \int_{\Gamma^i} \vec{n} \, dl^y$ . Compte tenu de  $\vec{q}^{(0)} = -K(\vec{y}) \otimes \overrightarrow{\text{grad}}^y \tilde{\theta}^{(1)}$ , la formulation variationnelle du problème s'écrit :

Trouver  $\tilde{\theta}^{(1)}$ ,  $[[\tilde{\theta}^{(1)}]]^i = \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} \cdot \vec{Y}^i$  et  $\langle \vec{q}^{(0)} \rangle$  tels que :

$$\begin{aligned} \forall \eta, [[\eta]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, & - \int_Y \left( K(\vec{y}) \otimes \overrightarrow{\text{grad}}^y \tilde{\theta}^{(1)} \right) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \, ds^y \\ & = \sum_{i=1,2} \left( [[\eta]]^i \vec{N}^i \right) \cdot \langle \vec{q}^{(0)} \rangle \end{aligned}$$

L'intérêt de cette formulation est qu'elle permet dans un calcul par éléments finis de déterminer directement la moyenne  $\langle \vec{q}^{(0)} \rangle$  sans avoir à faire de calcul d'intégrales.

Formulations variationnelles le vecteur  $\vec{\chi}$

Trouver  $\vec{\chi}$  périodique tel que :

$$\forall \vec{w} \text{ périodique, } \int_Y \left( K \circ \left( \mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T \right) \right) : \nabla^y \vec{w}^T \, ds^y = 0$$

ou aussi :

$$\forall \vec{v} \text{ périodique } \int_Y \left( \nabla^y \vec{v} \circ K \circ \left( \mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T \right) \right) \, ds^y = 0$$

Formulations variationnelles pour le vecteur  $\vec{\chi}$

Trouver  $\vec{\chi}$  vérifiant  $[[\vec{\chi}]]^i = \vec{Y}^i$  sur  $\Gamma^i$ ,  $i = 1, 2$  et  $\langle Q \rangle$  tels que :

$$\begin{aligned} \forall \vec{w}, [[\vec{w}]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \int_Y (K \circ \nabla^y \vec{\chi}^T) : \nabla^y \vec{w}^T ds^y \\ + \sum_{i=1,2} (\vec{N}^i \otimes [[\vec{w}]]^i) : \langle Q \rangle = 0 \end{aligned}$$

L'intérêt de cette formulation est qu'elle permet dans un calcul par éléments finis de déterminer le tenseur de conductivité homogénéisé  $K^H = -\langle Q \rangle$  directement sans avoir à faire de calcul d'intégrales.

## Propriétés des coefficients homogénéisés

Le tenseur de conductivité homogénéisé  $K^H$  de la loi de Fourier macroscopique est défini par :

$$|Y| K^H = \int_Y K \circ (\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T) ds^y$$

d'où en ajoutant  $\int_Y (\nabla^y \vec{v} \circ K \circ (\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T)) ds^y$  où  $\vec{v} = \vec{\chi}$  :

$$|Y| K^H = \int_Y (\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}) \circ K \circ (\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T) ds^y$$

Ce qui, en raison de la symétrie de  $K$ , montre que  $K^H$  est symétrique.

Homogénéisation d'un composite élastique

Adaptation de l'étude thermique à un milieu élastique périodique finement hétérogène

## Milieu élastique périodique

On considère l'équilibre d'un milieu linéairement élastique dans le cadre des petites transformations occupant le domaine  $\Omega$  (de dimension 2). L'équation d'équilibre, dit indéfini, s'écrit :

$$\operatorname{div}^x \sigma + \vec{f} = 0 \text{ dans } \Omega$$

soit en notation indicielle :

$$\partial_i^x \sigma_{ij} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes et  $\vec{f}$  une densité surfacique de forces.



La loi de comportement isotrope, dite aussi loi de Hooke, s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}^x(\vec{u}) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(\vec{u})$$

où  $\vec{u}$  est le champ de déplacement du milieu,  $e^x(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\nabla^x \vec{u} + (\nabla^x \vec{u})^T)$  le tenseur des déformations, c'est-à-dire la partie symétrique de la différentielle  $\nabla^x \vec{u}$  et  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé du matériau. Pour la mise en œuvre de la méthode asymptotique d'homogénéisation, il est plus simple de considérer une loi anisotrope qui s'écrit :

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} e_{kl}(\vec{u})$$

où les coefficient d'élasticité vérifie les symétries usuelles

$$A_{ijkl} = A_{klij} = A_{ijlk}$$

On écrit aussi la loi de comportement sous la forme :

$$\sigma = A @ e^x (\vec{u})$$

où  $A$  désigne le tenseur du 4<sup>e</sup> ordre de composantes  $A_{ijkl}$  ; en l'occurrence,  $A$  est considéré comme une application linéaire de l'espace  $\mathcal{L}^S(V)$  des tenseurs d'ordre 2 dans lui-même et  $A @ e^x (\vec{u})$  désigne l'image du tenseur des déformations par l'application linéaire  $A$ .

Le tenseur 4<sup>e</sup> ordre  $A$  dépend périodiquement de  $\vec{x}$ , il est défini de façon analogue au tenseur de conductivité thermique  $K^\epsilon$  de l'étude de la conduction thermique, la cellule  $Y$  étant définie de façon analogue.

Les équations de l'élasticité considérées pour l'étude de l'homogénéisation sont par conséquent :

$$\operatorname{div}^x \sigma^\epsilon + \vec{f} = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\sigma^\epsilon = A^\epsilon(\vec{x}) \otimes e^x(\vec{u}^\epsilon) \text{ dans } \Omega$$

+ conditions aux limites non précisées

où :

$$A^\epsilon(\vec{x}) = A \left( \begin{array}{c} \vec{x} \\ \epsilon \end{array} \right)$$

$A(\vec{y})$  étant défini sur la cellule  $Y$ .

## Développements asymptotiques

On cherche le champ de déplacement sous la forme d'un développement en double échelle :

$$\vec{u}^\epsilon(\vec{x}) = \vec{u}^{(0)}(\vec{x}) + \epsilon \vec{u}^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 \vec{u}^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots$$

où les  $\vec{u}^{(n)}(\vec{x}, \vec{y})$  sont  $y$ -périodiques de période  $Y$ .

Par dérivation, il vient :

$$\nabla^x \vec{u}^\epsilon = \nabla^x \vec{u}^{(0)} + \nabla^y \vec{u}^{(1)} + \epsilon \left( \nabla^x \vec{u}^{(1)} + \nabla^y \vec{u}^{(2)} \right) + \dots$$

d'où pour le tenseur des déformations :

$$e^x(\vec{u}^\epsilon) = e^x(\vec{u}^{(0)}) + e^y(\vec{u}^{(1)}) + \epsilon \left( e^x(\vec{u}^{(1)}) + e^y(\vec{u}^{(2)}) \right) + \dots$$

Le développement de la loi de comportement montre que :

$$\sigma^\epsilon(\vec{x}) = \sigma^{(0)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon\sigma^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2\sigma^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots$$

où les  $\sigma^{(n)}(\vec{x}, \vec{y})$  sont  $y$ -périodiques de période  $Y$  et donne les relations :

$$\begin{aligned}\sigma^{(0)} &= A@ \left( e^x(\vec{u}^{(0)}) + e^x(\vec{u}^{(1)}) \right) \\ \sigma^{(1)} &= A@ \left( e^x(\vec{u}^{(1)}) + e^x(\vec{u}^{(2)}) \right) \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Par dérivation du développement de  $\sigma^\epsilon$ , on obtient :

$$\operatorname{div} \sigma^\epsilon(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}^y \sigma^{(0)} + \operatorname{div}^x \sigma^{(0)} + \operatorname{div}^y \sigma^{(1)} + \epsilon \left( \operatorname{div}^x \sigma^{(1)} + \operatorname{div}^y \sigma^{(2)} \right) + \dots$$

et le développement de l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}^y \sigma^{(0)} + \operatorname{div}^x \sigma^{(0)} + \operatorname{div}^y \sigma^{(1)} + \epsilon \left( \operatorname{div}^x \sigma^{(1)} + \operatorname{div}^y \sigma^{(2)} \right) + \dots + \vec{f} = 0$$

d'où en identifiant les termes de même puissance de  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^y \sigma^{(0)} &= 0 \\ \operatorname{div}^x \sigma^{(0)} + \operatorname{div}^y \sigma^{(1)} + \vec{f} &= 0 \\ \operatorname{div}^x \sigma^{(1)} + \operatorname{div}^y \sigma^{(2)} &= 0 \\ \dots &= 0 \end{aligned}$$

Equation d'équilibre macroscopique

L'équation d'équilibre s'obtient par intégration sur  $Y$  de :

$$\operatorname{div}^x \sigma^{(0)} + \operatorname{div}^y \sigma^{(1)} + \vec{f} = 0$$

on obtient :

$$\operatorname{div}^x \langle \sigma^{(0)} \rangle + \vec{f} = 0$$

## Loi de comportement macroscopique

La détermination de la loi de comportement macroscopique passe par la résolution d'un problème d'élasticité sur la cellule  $Y$  qui s'écrit :

Etant donné  $e^x(\vec{u}^{(0)})$ , trouver  $\vec{u}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y})$  défini  $Y$  tel que :

$$\operatorname{div}^y \sigma^{(0)} = 0$$

$$\sigma^{(0)} = A \otimes \left( e^x(\vec{u}^{(0)}) + e^x(\vec{u}^{(1)}) \right)$$

$$\vec{u}^{(1)} \text{ égal sur les bords opposés de } \partial Y$$

$$\sigma^{(0)} \otimes \vec{n} \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y$$

Ce problème résolu, on obtient la loi de comportement macroscopique par une moyenne sur  $Y$  :

$$\langle \sigma^{(0)} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( A \otimes \left( e^x(\vec{u}^{(0)}) + e^x(\vec{u}^{(1)}) \right) \right) ds^y$$



Le problème est linéaire et, comme dans l'étude du problème de thermique, on peut montrer que la solution  $\vec{u}$  s'écrit  $\vec{u}^{(1)} = \bar{\chi}^{ij}(\vec{y}) e_{ij}^x(\vec{u}^{(0)}) + \bar{u}^{(1)}(\vec{x})$  où  $\bar{u}^{(1)}$  est une fonction de  $\vec{x}$  indéterminée dans le problème et où les fonctions  $\bar{\chi}^{ij}(\vec{y})$  sont solutions des problèmes :

$$\text{div} \tau^{ij} = 0$$

$$\tau^{ij} = A \otimes e^y \left( (y_k + \bar{\chi}^{ij}) \right)$$

$$\bar{\chi}^{ij} \text{ égal sur les bords opposés de } \partial Y$$

$$\tau^k \otimes \vec{n} \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y$$

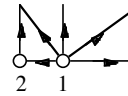
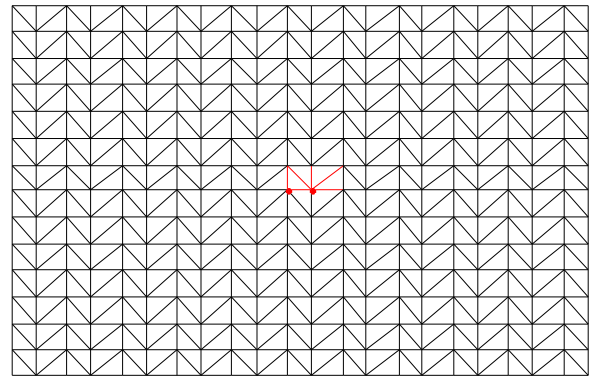
## Exercices

- Déterminer les Les coefficients d'élasticité homogénéisés  $A_{ijkl}^H$  en fonction des  $\bar{\chi}^{ij}$ .
- Déterminer la formulation variationnelle du problème pour  $\vec{u}^{(1)}$ .

## Modélisation continue de milieux discrets répétitifs

L'objectif de cette partie est présenter comment déterminer un modèle continu équivalent d'une structure discrète par une méthode d'homogénéisation. Par milieu discret on entend des structures modélisées par un système discret de degrés de liberté et d'équations, par exemple des treillis de barres, des réseaux de poutres ou de fibres.

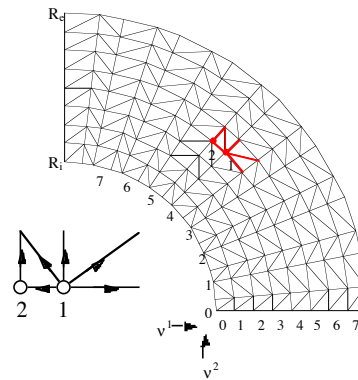
Comme dans le reste de ces notes, on ne considère que des structures répétitives périodiques ou plus généralement quasi périodiques. La mise en œuvre est présentée pour des treillis de barres articulées.



Exemple de treillis périodique

# Descriptions topologique, géométrique et mécanique du treillis répétitif

Les treillis considérés dans ce paragraphe sont faites de la répétition périodique ou quasi périodique d'une cellule élémentaire.



La cellule élémentaire est constituée de nœuds numérotés  $n$  et de barres numérotées  $b$ , l'ensemble des nœuds de la cellule est noté  $\mathcal{N}$ , celui des interactions  $\mathcal{B}$ .

La topologie du treillis est répétitive, les cellules le constituant sont numérotées par un doublet  $\underline{\nu} = (\nu^1, \nu^2)$  pour des treillis bidimensionnel. Les nœuds du treillis sont numérotés  $\tilde{n} = (\underline{\nu}, n)$ , ce qui signifie que  $\tilde{n}$  est le nœud  $n$  de la cellule  $\underline{\nu}$ , de la même façon les barres sont numérotées  $\tilde{b} = (\underline{\nu}, b)$ . L'ensemble des nœuds est noté  $\tilde{\mathcal{N}}$ , celui des barres  $\tilde{\mathcal{B}}$ . L'ensemble des nœuds  $n$  de la cellule élémentaire est  $\tilde{\mathcal{N}}$ , celui des barres  $b$  est noté  $\mathcal{B}$ .

Les barres du treillis sont orientées, par convention, l'origine  $\tilde{O}(\tilde{b})$  de la barre  $\tilde{b} = (\underline{\nu}, b)$  est le nœud  $(\underline{\nu}, O(b))$  de la même cellule que  $\tilde{b}$ , l'extrémité  $\tilde{E}(\tilde{b})$  de cette barre est le nœud  $(\underline{\nu} + \underline{\delta}^b, E(b))$  de la même cellule que  $\tilde{b}$  ( $\underline{\delta}^b = 0$ ) ou d'une cellule voisine ( $\underline{\delta}^b \neq (0, 0)$ ).

La structure mécanique considérée est constituée des barres du treillis et de ses nœuds, en supposant que le treillis n'est chargé qu'en ses nœuds, la géométrie ainsi que l'équilibre du treillis se ramènent à ceux des nœuds.

La géométrie du treillis est donc définie par les positions  $\vec{x}^{\tilde{n}}$  de ses nœuds et les vecteurs « barre » et les vecteurs unitaires de la barre  $\tilde{b}$  sont donnés par :

$$\vec{c}^{\tilde{b}} = \vec{x}^{\tilde{E}(\tilde{b})} - \vec{x}^{\tilde{O}(\tilde{b})}$$
$$\vec{e}^{\tilde{b}} = \frac{\vec{c}^{\tilde{b}}}{\|\vec{c}^{\tilde{b}}\|}$$

L'équilibre du treillis se ramène à celui de chacune de ses parties, c'est-à-dire à celui des barres et des nœuds. Le treillis n'étant chargé qu'en ses nœuds par des forces, l'équilibre des barres entraîne que l'effort interne à la barre  $\tilde{b}$  est un effort normal  $N^{\tilde{b}}\vec{e}^{\tilde{b}}$  constant le long de la barre. En notant  $\vec{f}^{\tilde{n}}$  la force extérieure exercée sur le nœud  $\tilde{n}$ , l'équilibre de ce nœud s'écrit :

$$\sum_{\tilde{b} \in \tilde{O}^{-1}(\tilde{n})} N^{\tilde{b}}\vec{e}^{\tilde{b}} - \sum_{\tilde{b} \in \tilde{E}^{-1}(\tilde{n})} N^{\tilde{b}}\vec{e}^{\tilde{b}} + \vec{f}^{\tilde{n}} = 0$$

où  $\tilde{O}^{-1}(\tilde{n})$  et  $\tilde{E}^{-1}(\tilde{n})$  désignent l'ensemble des barres dont  $\tilde{n}$  est l'origine respectivement l'extrémité.

Dans le cadre des petits déplacements autour d'une configuration non contraintes, ces équations d'équilibre sont écrites sur la configuration non déformée, ce qui signifie que les vecteurs unitaires des barres  $\vec{e}^{\tilde{b}}$  sont ceux de cette configuration.

La formulation en puissances virtuelles des équations d'équilibre s'obtient en multipliant ces équations par des vitesses virtuelles  $\vec{v}^{\tilde{n}}$  et en sommant sur  $\tilde{n}$  :

$$\sum_{\tilde{n} \in \tilde{\mathcal{N}}} \left( \sum_{\tilde{b} \in \tilde{O}^{-1}(\tilde{n})} N^{\tilde{b}} \vec{e}^{\tilde{b}} - \sum_{\tilde{b} \in \tilde{E}^{-1}(\tilde{n})} N^{\tilde{b}} \vec{e}^{\tilde{b}} \right) \cdot \vec{v}^{\tilde{n}} + \sum_{\tilde{n}} \vec{f}^{\tilde{n}} \cdot \vec{v}^{\tilde{n}} = 0$$

puis, en intervertissant les sommes sur  $\tilde{n}$  et sur les  $\tilde{b}$ , on obtient la formulation en puissances virtuelles :

$$\forall \vec{v}^{\tilde{n}}, - \sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}} N^{\tilde{b}} \vec{e}^{\tilde{b}} \cdot \left( \vec{v}^{\tilde{E}(\tilde{b})} - \vec{v}^{\tilde{O}(\tilde{b})} \right) + \sum_{\tilde{n}} \vec{f}^{\tilde{n}} \cdot \vec{v}^{\tilde{n}} = 0$$

En se limitant à l'élasticité, la loi de comportement intégrée de la barre  $\tilde{b}$  s'écrit dans le cadre des petits déplacements :

$$N^{\tilde{b}} = k^{\tilde{b}} \vec{e}^{\tilde{b}} \cdot \left( \vec{u}^{\tilde{E}(\tilde{b})} - \vec{u}^{\tilde{O}(\tilde{b})} \right)$$

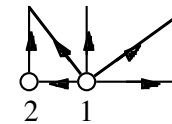
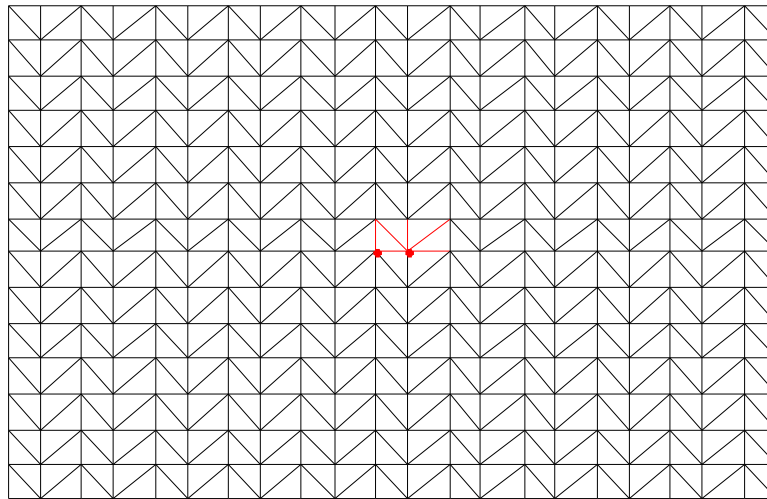
où  $\vec{u}^{\tilde{n}}$  est le déplacement du nœud  $\tilde{n}$ .



## Modélisation continue d'un treillis périodique dans le cadre des petits déplacements

On considère un treillis exactement périodique comportant un nombre important  $N_c$  de cellules élémentaires comme celui de la figure. On suppose que les cellules se répartissent sur les deux directions du plan de façon équivalente, autrement dit que le treillis n'a pas la forme d'une poutre ou d'un arc. Le nombre de cellules  $N_c$  étant très grand, on introduit un petit paramètre  $\epsilon$  qui est de l'ordre de  $N_c^{1/2}$  et qui est destiné à tendre vers 0 dans le processus d'homogénéisation.

On construit donc une suite de treillis dépendant de  $\epsilon$  en se donnant une cellule de base de taille finie, en lui appliquant une homothétie de rapport  $\epsilon$  et en remplissant le domaine  $\Omega$  occupé par le treillis par la répétition périodique de la petite cellule homothétique de la grande. Dans cette opération on voit que les vecteurs  $\vec{c}^{\tilde{b}}$  des barres du treillis sont les homothétiques des vecteurs  $\vec{C}^b$  des barres de la cellule de base, soit  $\vec{c}^{\tilde{b}} = \epsilon \vec{C}^b$ .



En soulignant la dépendance vis à vis de  $\epsilon$ , les déplacements des nœuds et les tensions dans les barres sont notés  $\vec{u}^{\tilde{n}\epsilon}$  et  $N^{\tilde{b}\epsilon}$  et les équations vérifiées par ces quantités sont :

$$\forall \vec{v}^{\tilde{n}}, - \sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}} N^{\tilde{b}\epsilon} \vec{e}^{\tilde{b}} \cdot \left( \vec{v}^{\tilde{E}(\tilde{b})} - \vec{v}^{\tilde{O}(\tilde{b})} \right) + \sum_{\tilde{n}} \vec{f}^{\tilde{n}} \cdot \vec{v}^{\tilde{n}} = 0$$

$$N^{\tilde{b}\epsilon} = k^{\tilde{b}} \vec{e}^{\tilde{b}} \cdot \left( \vec{u}^{\tilde{E}(\tilde{b})\epsilon} - \vec{u}^{\tilde{O}(\tilde{b})\epsilon} \right)$$

+d'éventuelles conditions cinématiques

où on a pris en compte le fait que, *en raison de la périodicité exacte*, les vecteurs unitaires des barres ne dépendent ni du numéro de cellule  $\underline{\nu} = (\nu^1, \nu^2)$  de la barre  $\tilde{b}$  ni de  $\epsilon$ .

Pour homogénéiser ce treillis, c'est-à-dire en l'occurrence trouver un milieu continu équivalent, on utilise, comme dans les cas continus étudiés précédemment, des développements en double échelle des déplacements  $\vec{u}^{\tilde{n}\epsilon}$  des nœuds. La variable de grande échelle peut être la même que dans les cas continus, c'est-à-dire la position  $\vec{x}^{\tilde{n}}$  du nœud  $\tilde{n}$ . Par contre, dans le cas discret, il n'y a pas de variable de petite échelle  $\vec{y}$  continue, ce qui joue ce rôle c'est le numéro  $n$  du nœud  $\tilde{n} = (\nu, n)$  dans la cellule. On cherche donc  $\vec{u}^{\tilde{n}\epsilon}$  sous la forme du développement :

$$\vec{u}^{\tilde{n}\epsilon} = \vec{u}^{(0)}(\vec{x}^{\tilde{n}}) + \epsilon \vec{u}^{n(1)}(\vec{x}^{\tilde{n}}) + \epsilon^2 \vec{u}^{n(2)}(\vec{x}^{\tilde{n}}) + \dots$$

où les  $\vec{u}^{n(1)}$  sont des fonctions de la variable de grande échelle  $\vec{x}$ . Conformément à ce qui a été constaté pour les cas continus étudiés précédemment, le premier terme du développement  $\vec{u}^{(0)}(\vec{x})$  ne dépend que de la variable de grande échelle  $\vec{x}$  et pas du numéro du nœud dans la cellule.

L'étape suivante est de développer les lois de comportement des barres  $N^{\tilde{b}\epsilon} = k^b \bar{e}^b \cdot (\vec{u}^{\tilde{E}(\tilde{b})\epsilon} - \vec{u}^{\tilde{O}(\tilde{b})\epsilon})$  pour définir la forme des développements asymptotiques des tensions dans les barres. Pour cela, on est amené à développer la différence  $\vec{u}^{\tilde{E}(\tilde{b})\epsilon} - \vec{u}^{\tilde{O}(\tilde{b})\epsilon}$  pour une barre  $\tilde{b}$ .

Relativement à la position  $\vec{x}^{\tilde{O}(\tilde{b})}$  du nœud origine  $\tilde{O}(\tilde{b})$  de la barre  $\tilde{b}$ , celle du nœud extrémité  $\tilde{E}(\tilde{b})$  est  $\vec{x}^{\tilde{O}(\tilde{b})} + \epsilon \vec{C}^b$ . On a donc :

$$\vec{u}^{\tilde{O}(\tilde{b})\epsilon} = \vec{u}^{(0)} \left( \vec{x}^{\tilde{O}(\tilde{b})} \right) + \epsilon \vec{u}^{O(b)(1)} \left( \vec{x}^{\tilde{O}(\tilde{b})} \right) + \dots$$

$$\vec{u}^{\tilde{E}(\tilde{b})\epsilon} = \vec{u}^{(0)} \left( \vec{x}^{\tilde{O}(\tilde{b})} + \epsilon \vec{C}^b \right) + \epsilon \vec{u}^{E(b)(1)} \left( \vec{x}^{\tilde{O}(\tilde{b})} + \epsilon \vec{C}^b \right) + \dots$$

En développant par Taylor le terme  $\vec{u}^{E(b)(1)} \left( \vec{x}^{\tilde{O}(\tilde{b})} + \epsilon \vec{C}^b \right)$ , on obtient :

$$\vec{u}^{\tilde{E}(\tilde{b})\epsilon} - \vec{u}^{\tilde{O}(\tilde{b})\epsilon} = \epsilon \left( \nabla^x \vec{u}^{(0)} \otimes \vec{C}^b + \vec{u}^{E(b)(1)} - \vec{u}^{O(b)(1)} \right) + \dots$$

Ce qui montre que les tensions  $N^{\tilde{b}\epsilon}$  se développent en :

$$N^{\tilde{b}\epsilon} = \epsilon \left( N^{b(0)}(\vec{x}^{\tilde{n}}) + \epsilon N^{b(1)}(\vec{x}^{\tilde{n}}) + \epsilon^2 N^{b(2)}(\vec{x}^{\tilde{n}}) + \dots \right)$$

avec :

$$N^{b(0)} = k^b \vec{e}^b \cdot \left( \nabla^x \vec{u}^{(0)} \otimes \vec{C}^b + \vec{u}^{E(b)(1)} - \vec{u}^{O(b)(1)} \right)$$

soit aussi :

$$N^{b(0)} = k^b \left( \vec{e}^b \otimes \vec{C}^b \right) : \nabla^x \vec{u}^{(0)} + k^b \vec{e}^b \cdot \left( \vec{u}^{E(b)(1)} - \vec{u}^{O(b)(1)} \right)$$

Pour définir le tenseur des contraintes  $\sigma$  du milieu continu équivalent et obtenir l'équation d'équilibre macroscopique vérifiée par  $\sigma$ , on adapte à ce cas discret une méthode proposée par E. Sanchez-Palencia . On prend dans la formulation faible des vitesses virtuelles  $\vec{v}^{\tilde{n}}$  de la forme  $\vec{v}^{\tilde{n}} = \vec{v}(\vec{x}^{\tilde{n}})$  où  $\vec{v}$  est un champ virtuel macroscopique nul sur le bord  $\partial\Omega$ . On a en développant  $\vec{v}^{\tilde{E}}(\tilde{b})$  :

$$\vec{v}^{\tilde{E}}(\tilde{b}) - \vec{v}^{\tilde{O}}(\tilde{b}) = \epsilon \nabla^x \vec{v} \otimes \vec{C}^b + \dots$$

et la formulation faible pour ces vitesses virtuelles devient :

$$\forall \vec{v}, - \sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}} \epsilon^2 N^{b(0)} \vec{e}^b \cdot (\nabla^x \vec{v} \otimes \vec{C}^b) + \sum_{\tilde{n}} \vec{f}^{\tilde{n}} \cdot \vec{v}(\vec{x}^{\tilde{n}}) + \dots = 0$$

soit aussi :

$$\forall \vec{v}, - \sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}} \epsilon^2 N^{b(0)} (\vec{e}^b \otimes \vec{C}^b) : \nabla^x \vec{v} + \sum_{\tilde{n}} \vec{f}^{\tilde{n}} \cdot \vec{v}(\vec{x}^{\tilde{n}}) + \dots = 0$$

On décompose ensuite les sommes  $\sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{B}}}$  et  $\sum_{\tilde{n} \in \tilde{\mathcal{N}}}$  en  $\sum_{\underline{\nu}} \sum_{b \in \mathcal{B}}$  et  $\sum_{\underline{\nu}} \sum_{n \in \mathcal{N}}$  s, ce qui donne :

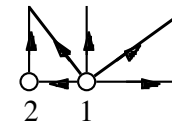
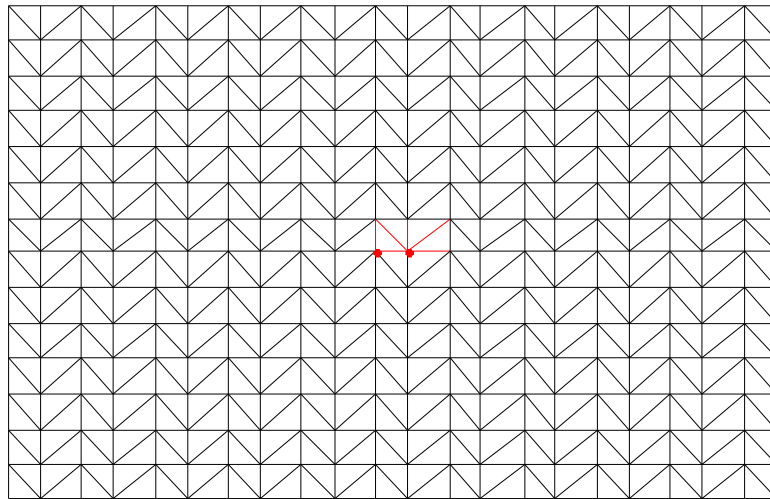
$$\forall \vec{v}, - \sum_{\underline{\nu}} \sum_{b \in \mathcal{B}} \epsilon^2 N^{b(0)} \left( \vec{e}^b \otimes \vec{C}^b \right) : \nabla^x \vec{v} + \sum_{\underline{\nu}} \sum_{n \in \mathcal{N}} \vec{f}^{\tilde{n}} \cdot \vec{v} \left( \vec{x}^{\tilde{n}} \right) + \dots = 0$$

Les cellules du treillis étant petites et nombreuses, on interprète les sommes sur les cellules  $\sum_{\underline{\nu}}$  comme des sommes de Riemann d'une intégrale mais pour cela il faut au préalable faire apparaître la surface d'une cellule élémentaire qui est  $\epsilon^2$  la surface  $|Y|$  de la cellule de base c'est-à-dire  $\epsilon^2 |Y|$ . On écrit donc :

$$\begin{aligned} \forall \vec{v}, - \sum_{\underline{\nu}} \left( \left( \frac{1}{|Y|} \sum_{b \in \mathcal{B}} N^{b(0)} \left( \vec{e}^b \otimes \vec{C}^b \right) \right) : \nabla^x \vec{v} \right) \epsilon^2 |Y| \\ + \sum_{\underline{\nu}} \left( \frac{1}{\epsilon^2 |Y|} \sum_{n \in \mathcal{N}} \vec{f}^{\tilde{n}} \cdot \vec{v} \left( \vec{x}^{\tilde{n}} \right) \right) \epsilon^2 |Y| + \dots = 0 \end{aligned}$$



Avant de passer à la limite et d'approcher les sommes  $\sum_{\nu}(\bullet) \epsilon^2 |Y|$  par  $\int_{\Omega}(\bullet) ds$ , on est amené à supposer que les forces  $\vec{f}^{\vec{n}}$  sont de l'ordre de  $\epsilon^2$ , ce à quoi on pouvait s'attendre en estimant la force extérieure qui s'exerce sur un élément de surface  $ds$  du domaine  $\Omega$ , petit devant la taille de  $\Omega$  mais contenant un grand nombre de cellule et donc de nœuds quand  $\epsilon$  tend vers 0.



Avec cette mise à l'échelle des forces  $\vec{f}^{\tilde{n}}$ , on a pour  $\epsilon \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} \forall \vec{v}, - \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \sum_{b \in \mathcal{B}} N^{b(0)} (\vec{e}^b \otimes \vec{C}^b) : \nabla^x \vec{v} \, ds \\ + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\epsilon^2 |Y|} \sum_{n \in \mathcal{N}} \vec{f}^{\tilde{n}} \right) \cdot \vec{v} \, ds + \dots = 0 \end{aligned}$$

soit :

$$\forall \vec{v}, \vec{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, - \int_{\Omega} \sigma : \nabla^x \vec{v} \, ds + \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, ds + \dots = 0$$

où :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{|Y|} \sum_{b \in \mathcal{B}} N^{b(0)} (\vec{e}^b \otimes \vec{C}^b) \\ \vec{f} &= \frac{1}{\epsilon^2 |Y|} \sum_{n \in \mathcal{N}} \vec{f}^{\tilde{n}} \end{aligned}$$

Loi de comportement du milieu continu équivalent.

Comme dans tout problème d'homogénéisation, la loi de comportement s'obtient par la résolution d'un problème, ici discret, sur la cellule de base.

On repart de la formulation en puissances virtuelles, on prend des vitesses virtuelles de la forme  $\vec{v}^{\tilde{n}} = \theta(\vec{x}) \vec{v}^n$  où  $\theta$  est une fonction définie sur  $\Omega$  s'annulant sur le bord  $\partial\Omega$ . Il vient, en scindant les sommations en deux comme précédemment :

$$\forall \theta, \forall \vec{v}^n, - \sum_{\underline{\nu}} \left( \frac{1}{\epsilon^2 |Y|} \sum_{b \in \mathcal{B}} \epsilon N^{b(0)} \vec{e}^b \cdot (\vec{v}^{E(b)} - \vec{v}^{O(b)}) \right) \theta \epsilon^2 |Y| \\ + \sum_{\underline{\nu}} \left( \frac{1}{\epsilon^2 |Y|} \sum_{\tilde{n}} \vec{f}^{\tilde{n}} \cdot \vec{v}^{\tilde{n}} \right) \theta \epsilon^2 |Y| = 0$$

On voit qu'avant d'approcher les sommes  $\sum_{\underline{\nu}}(\bullet) \epsilon^2 |Y|$  par  $\int_{\Omega}(\bullet) ds$  dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , il faut multiplier l'équation par  $\epsilon$ , ce qui donne :

$$\forall \theta, \forall \vec{v}^n, - \sum_{\underline{\nu}} \left( \frac{1}{|Y|} \sum_{b \in \mathcal{B}} N^{b(0)} \vec{e}^b \cdot (\vec{v}^{E(b)} - \vec{v}^{O(b)}) \right) \theta \epsilon^2 |Y| \\ + \sum_{\underline{\nu}} \left( \epsilon \frac{1}{\epsilon^2 |Y|} \sum_{\tilde{n}} \vec{f}^{\tilde{n}} \cdot \vec{v}^{\tilde{n}} \right) \theta \epsilon^2 |Y| = 0$$

et, à la limite, compte tenu des ordre de grandeurs des forces  $\vec{f}^{\tilde{n}}$ , on obtient :

$$\forall \theta, \forall \vec{v}^n, \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \sum_{b \in \mathcal{B}} N^{b(0)} \vec{e}^b \cdot (\vec{v}^{E(b)} - \vec{v}^{O(b)}) \right) \theta ds = 0$$

$\theta$  étant quelconque, on en déduit que :

$$\forall \vec{v}^n, \sum_{b \in \mathcal{B}} N^{b(0)} \vec{e}^b \cdot (\vec{v}^{E(b)} - \vec{v}^{O(b)}) = 0$$

qui est la formulation en puissance virtuelles de l'équilibre des nœuds de la cellule de base.

Le problème à résoudre sur la cellule de base pour déterminer la loi de comportement macroscopique est :

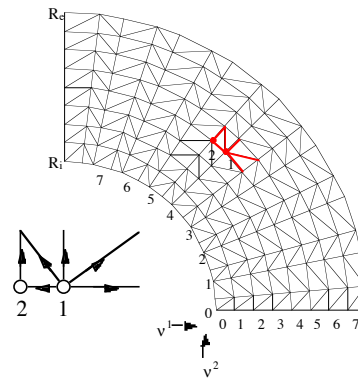
Etant donné  $\nabla^x \vec{u}^{(0)}$ , trouver les  $\vec{u}^{n(1)}$  et les  $N^{b(0)}$  tels que :

$$\forall \vec{v}^n, \sum_{b \in \mathcal{B}} N^{b(0)} \vec{e}^b \cdot (\vec{v}^{E(b)} - \vec{v}^{O(b)}) = 0$$

$$N^{b(0)} = k^b (\vec{e}^b \otimes \vec{R}^b) : \nabla^x \vec{u}^{(0)} + k^b \vec{e}^b \cdot (\vec{u}^{E(b)(1)} - \vec{u}^{O(b)(1)})$$

Une fois résolu ce problème, on connaît les  $N^{b(0)}$  en fonction de  $\nabla^x \vec{u}^{(0)}$  et le report de ces  $N^{b(0)}$  dans l'expression  $\sigma = \frac{1}{|Y|} \sum_{b \in \mathcal{B}} N^{b(0)} (\vec{e}^b \otimes \vec{C}^b)$  donne  $\sigma$  en fonction de  $\nabla^x \vec{u}^{(0)}$ , ce qui est la loi de comportement macroscopique.

Pour des milieux répétitifs mais seulement quasi périodiques  
comme :



ou dans le cadre des grands déplacements, la mise en œuvre de la méthode précédemment décrite est plus complexe, les vecteurs « barre »  $\vec{c}^b$  ne sont plus égaux à  $\epsilon \vec{C}^b$  et les surfaces des cellules élémentaires ne sont plus  $\epsilon^2 |Y|$ .



Une façon d'éviter ces complications est d'utiliser le repérage  $\tilde{n} = (\underline{\nu}, n)$  des nœuds du treillis et de transformer à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  le système des couples d'entier  $\underline{\nu} = (\nu^1, \nu^2)$  en un couple de variables réelles  $(\lambda^1, \lambda^2)$  appartenant à un domaine  $\omega$ . Ce qui revient à paramétrer le milieu continu équivalent par  $(\lambda^1, \lambda^2)$ .

Avant d'homogénéiser, il est nécessaire de décrire la géométrie du treillis pour pouvoir calculer les vecteurs unitaires  $\vec{e}^{\tilde{b}}$  des barres.

Les positions  $\vec{x}^{\tilde{n}}$  des nœuds du treillis est donné par :

$$\vec{x}^{\tilde{n}} = \vec{\varphi}(\epsilon\nu^1, \epsilon\nu^2) + \epsilon\vec{r}^{\tilde{n}}(\epsilon\nu^1, \epsilon\nu^2)$$

où  $\vec{\varphi}$  et  $\vec{r}^{\tilde{n}}$  sont des fonctions de  $\lambda^1$  et  $\lambda^2$ .

Dans le cadre des grands déplacements, on cherche  $\vec{x}^{\tilde{n}}$  sous la forme :

$$\vec{x}^{\tilde{n}} = \vec{\varphi}^{(0)}(\epsilon\nu^1, \epsilon\nu^2) + \epsilon\vec{\varphi}^{n(1)}(\epsilon\nu^1, \epsilon\nu^2) + \epsilon^2\vec{\varphi}^{n(2)}(\epsilon\nu^1, \epsilon\nu^2) + \dots$$

Dans le cadre des petits déplacements, on cherche le déplacement  $\vec{u}^{\tilde{n}}$  sous la forme du développement :

$$\vec{u}^{\tilde{n}\epsilon} = \vec{u}^{(0)}(\epsilon\nu^1, \epsilon\nu^2) + \epsilon\vec{u}^{\tilde{n}(1)}(\epsilon\nu^1, \epsilon\nu^2) + \epsilon^2\vec{u}^{\tilde{n}(2)}(\epsilon\nu^1, \epsilon\nu^2) + \dots$$

La variable de grande échelle n'est plus  $\vec{x}$  qui donne la position des cellules mais le couple  $(\lambda^1, \lambda^2)$  qui identifie les cellules.

La différence  $\vec{u}^{\tilde{E}(\tilde{b})\epsilon} - \vec{u}^{\tilde{O}(\tilde{b})\epsilon}$  des déplacements des nœuds origine  $\tilde{O}(\tilde{b}) = (\underline{\nu}, O(b))$  et extrémité  $\tilde{E}(\tilde{b}) = (\underline{\nu} + (\delta^{b1}, \delta^{b2}), E(b))$  de la barre  $\tilde{b} = (\underline{\nu}, b)$  se calcule en développant :

$$\begin{aligned} \vec{u}^{\tilde{E}(\tilde{b})\epsilon} &= \vec{u}^{(0)}(\epsilon\nu^1 + \delta^{b1}, \epsilon\nu^2 + \delta^{b2}) \\ &+ \epsilon \vec{u}^{E(b)(1)}(\epsilon\nu^1 + \delta^{b1}, \epsilon\nu^2 + \delta^{b2}) + \dots \end{aligned}$$

en :

$$\begin{aligned} \vec{u}^{\tilde{E}(\tilde{b})\epsilon} &= \vec{u}^{(0)}(\epsilon\nu^1, \epsilon\nu^2) \\ &+ \epsilon \left( \frac{\partial}{\partial \lambda^i} \vec{u}^{(0)} \delta^{bi} + \vec{u}^{E(b)(1)}(\epsilon\nu^1, \epsilon\nu^2) \right) + \dots \end{aligned}$$

La déformation macroscopique du milieu continu équivalent est donné par les  $\frac{\partial}{\partial \lambda^i} \vec{u}^{(0)}$ .

## Milieux quasi périodiques

On appelle milieu quasi périodique un milieu qui n'est pas exactement périodique.

Cela peut être dû à une dépendance à grande échelle des propriétés du matériau, c'est-à-dire que le tenseur de conductivité est de la forme  $K^\epsilon(\vec{x}) = K\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right)$  où, pour tout  $\vec{x}$ ,  $K(\vec{x}, \vec{y})$  est défini dans une cellule  $Y$  indépendante de  $\vec{x}$ .

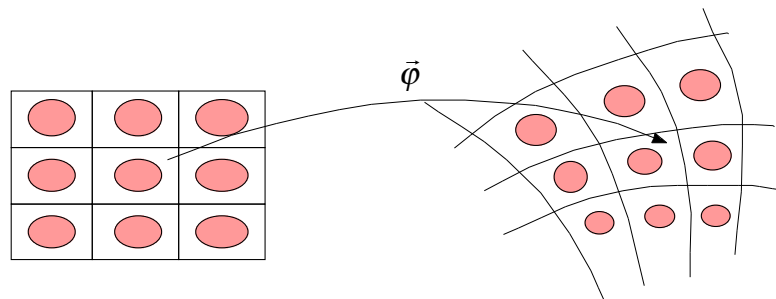
Cela peut aussi venir de l'absence d'une période géométrique exacte, le milieu présentant une quasi période qui varie lentement d'une période à l'autre.

On pourrait envisager de reprendre l'analyse du cas exactement périodique en considérant que la cellule  $Y$  dépend de la variable de grande échelle  $\vec{x}$  mais il ne serait plus possible d'invertir dérivation par rapport à la variable de grande échelle  $\vec{x}$  et l'intégration sur la cellule  $Y$  qui permet d'obtenir l'équation de conservation macroscopique.

Plus précisément, en supposant que le milieu occupe un domaine  $\Omega$ , on dira que le milieu est géométriquement quasi périodique s'il existe un domaine  $\tilde{\Omega}$  et une fonction bijective  $\vec{\varphi}$  de  $\tilde{\Omega}$  dans  $\Omega$  :

$$\vec{x} \in \tilde{\Omega} \xrightarrow{\vec{\varphi}} \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{x}) \in \Omega$$

telle que le milieu soit géométriquement périodique en variable  $\vec{x}$ .



Le premier cas de non périodicité, qu'on pourrait appeler quasi périodicité « comportementale », est l'objet des exercices suivants, le second cas, qu'on pourrait appeler quasi périodicité « géométrique » (ce qui n'exclut pas la quasi périodicité « comportementale », est l'objet de la suite de cette partie.

### Exercice

Reprendre l'analyse du cas exactement périodique dans le cas où :

$$- K^\epsilon(\vec{x}) = K\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right)$$

$$- K^\epsilon(\vec{x}) = K^{(0)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon K^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 K^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots$$

## Homogénéisation de milieux géométriquement quasi périodiques

Afin de se ramener au cas exactement périodique, on écrit les équations sur  $\tilde{\Omega}$  par le changement de variables  $\vec{x} \in \tilde{\Omega} \longleftrightarrow \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{x}) \in \Omega$

Pour cela, on effectue le changement de variables dans la formulation faible de la conservation de la chaleur qui s'écrit :

$$\forall \eta, \eta = 0 \text{ sur } \partial\Omega, - \int_{\Omega} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \eta \, ds^x + \int_{\Omega} f \eta \, ds^x = 0$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \forall \eta, \eta = 0 \text{ sur } \partial\tilde{\Omega}, - \int_{\tilde{\Omega}} \left( (\nabla^{\vec{x}} \vec{\varphi})^{-1} \circledast \vec{q} \right) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^{\vec{x}} \eta \det(\nabla^{\vec{x}} \vec{\varphi}) \, ds^{\vec{x}} \\ + \int_{\Omega} f \eta \det(\nabla^{\vec{x}} \vec{\varphi}) \, ds^{\vec{x}} = 0 \end{aligned}$$



En posant :

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}) (\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^{-1} \odot \vec{q} \\ \tilde{f} &= f \det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})\end{aligned}$$

on a :

$$\operatorname{div}^{\tilde{x}} \vec{q} + \tilde{f} = 0$$

La loi de Fourier devient quant à elle :

$$\vec{q} = -\tilde{K} \overrightarrow{\operatorname{grad}}^{\tilde{x}} \theta$$

où :

$$\tilde{K} = \det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}) (\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}^{-1} \circ K \circ \nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}^{-T})$$

En supposant que le tenseur de conductivité, noté  $K^\epsilon$ , est périodique en variable  $\vec{x}$  de période  $\epsilon \tilde{Y}$ , c'est-à-dire  $K^\epsilon(\vec{x}) = K\left(\frac{\vec{x}}{\epsilon}\right)$ , on voit que le tenseur  $\tilde{K}^\epsilon$  est tel que  $\tilde{K}^\epsilon(\vec{x}) = \tilde{K}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right)$

L'homogénéisation du milieu quasi périodique consiste à étudier le comportement asymptotique des équations :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^{\tilde{x}} \vec{q}^\epsilon + \tilde{f} &= 0 \text{ dans } \tilde{\Omega} \\ \vec{q}^\epsilon &= -\tilde{K} \left( \vec{\tilde{x}}, \frac{\vec{\tilde{x}}}{\epsilon} \right) \otimes \overrightarrow{\operatorname{grad}}^{\tilde{x}} \theta^\epsilon \text{ dans } \tilde{\Omega} \end{aligned}$$

L'équation de conservation macroscopique sur  $\tilde{\Omega}$  s'écrit :

$$\operatorname{div}^{\tilde{x}} \langle \vec{q}^{(0)} \rangle_{\tilde{Y}} + \langle \tilde{f} \rangle_{\tilde{Y}} = 0$$

où les moyennes  $\langle \vec{q}^{(0)} \rangle_{\tilde{Y}}$  et  $\langle \tilde{f} \rangle_{\tilde{Y}}$  sont définies par :

$$\langle \vec{q}^{(0)} \rangle_{\tilde{Y}} = \frac{1}{|\tilde{Y}|} \int_{\tilde{Y}} \vec{q} \, ds_{\tilde{y}}$$
$$\langle \tilde{f} \rangle_{\tilde{Y}} = \frac{1}{|\tilde{Y}|} \int_{\tilde{Y}} \tilde{f} \, ds_{\tilde{y}}$$

avec  $|\tilde{Y}| = \int_{\tilde{Y}} ds_{\tilde{y}}$

Le problème sur la cellule  $\tilde{Y}$  permettant de déterminer la « loi de Fourier » macroscopique dans  $\tilde{\Omega}$  est défini par les équations :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^{\tilde{y}} \vec{q}^{(0)} &= 0 \\ \vec{q}^{(0)} &= -\tilde{K} \circledast \left( \overrightarrow{\operatorname{grad}}^{\tilde{x}} \theta^{(0)} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}^{\tilde{y}} \theta^{(1)} \right) \\ \theta^{(0)} &\text{ égal sur les bords opposés de } \partial \tilde{Y} \\ \vec{q}^{(0)} \cdot \vec{n} &\text{ sur les bords opposés de } \partial \tilde{Y} \end{aligned}$$

et la « loi de Fourier » macroscopique dans  $\tilde{\Omega}$  s'écrit :

$$\langle \vec{q}^{(0)} \rangle_{\tilde{Y}} = -\frac{1}{|\tilde{Y}|} \int_{\tilde{Y}} \left( \tilde{K}(\vec{y}) \circledast \left( \overrightarrow{\operatorname{grad}}^{\tilde{x}} \theta^{(0)} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}^{\tilde{y}} \theta^{(1)} \right) \right) ds^y$$

Toutes ces équations sont écrites sur  $\tilde{\Omega}$  ou la cellule  $\tilde{Y}$ , il peut être utile de revenir à des équations écrites sur  $\Omega$  ou sur une cellule locale au point  $Y^x$ . Le passage des équations sur  $\tilde{\Omega}$  à des équations sur  $\Omega$  se fait par le changement de variables  $\vec{\tilde{x}} \leftrightarrow \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{\tilde{x}})$  utilisé pour établir les équations de conduction sur  $\tilde{\Omega}$ .

On définit la cellule  $Y^x$  où  $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{\tilde{x}})$  par :

$$Y^x = \vec{\psi}(\tilde{Y})$$

où la fonction  $\vec{\psi}$  est définie par :

$$\vec{\psi}(\vec{\tilde{y}}) = \nabla^{\vec{\tilde{x}}} \vec{\varphi} \circ \vec{\tilde{y}}$$

On pose :

$$\vec{q}^{(0)} = \frac{1}{\det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})} \nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi} \circ \vec{q}^{(0)}$$

Le problème pour  $\theta^{(1)}$  et  $\vec{q}^{(0)}$  sur  $Y^x$  s'écrit par conséquent :

$$\operatorname{div}^y \vec{q}^{(0)} = 0$$

$$\vec{q}^{(0)} = -K \circ (\overrightarrow{\operatorname{grad}}^x \theta^{(0)} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}^y \theta^{(1)})$$

$\theta^{(0)}$  égal sur les bords opposés de  $\partial Y^x$

$\vec{q}^{(0)} \cdot \vec{n}$  sur les bords opposés de  $\partial Y^x$

On a aussi :

$$\langle \tilde{f} \rangle = \langle f \rangle_Y \det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})$$

et :

$$\langle \vec{q}^{(0)} \rangle_Y = \frac{1}{\det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})} \nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi} \circ \langle \vec{q}^{(0)} \rangle_{\tilde{Y}}$$

avec dans  $\Omega$  :

$$\operatorname{div}^x \langle \vec{q}^{(0)} \rangle_Y + \langle f \rangle_Y = 0$$

Ce qui montre que la détermination de la loi de Fourier macroscopique sur  $\Omega$  peut être menée sur la cellule locale  $Y^x$  comme si le milieu était exactement périodique.

## Modèles non linéaires



On distingue souvent en mécanique des milieux continus les nonlinéarités géométriques et matérielles. La non linéarité géométrique vient de la prise en compte de grands déplacements qui fait que les équations du mouvement sous leur forme habituelle, en particulier l'équilibre, doivent être écrites non pas sur la configuration de référence connue mais sur la configuration déformée inconnue, l'écriture de ces équations sur la configuration de référence faisant apparaître des termes non linéaires. La non linéarité matérielle est la conséquence d'une loi de comportement non linéaire. La distinction entre ces non linéarités est quelquefois assez spécieuse car en grands déplacements la loi de comportement est pratiquement toujours non linéaire même en élasticité. Dans cet exposé on ne considère que le cas de l'élasticité non linéaire en grands déplacements (appelés aussi grandes transformations).

# Homogénéisation d'un milieu élastique périodique en grandes transformations

## Grandes transformations

Même si cette nécessité s'estompe en petits déplacements, en mécanique des milieux continus comme dans le reste de la mécanique, il est nécessaire d'identifier les points matériels constituant le milieu. Il est fréquent d'identifier les points matériels du milieu par leurs positions notées  $\vec{X}$  dans une configuration particulière dite configuration de référence. Il faut noter que cette configuration peut-être contrainte et n'est pas nécessairement en équilibre dans cet état contraint.

L'étude et la modélisation des milieux continus consistent à établir les équations permettant de déterminer la position  $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{X}, t)$  au cours du temps du point matériel identifié par sa position  $\vec{X}$  dans la configuration de référence noté  $\Omega_R$ , cela pour chacun des points du milieu. La fonction  $\vec{\varphi}$  est appelée fonction placement ou placement. La configuration  $\Omega_t = \vec{\varphi}(\Omega_R, t)$  à l'instant  $t$  est appelée configuration actuelle ou configuration déformée si c'est un équilibre qui est étudié, elle est alors notée  $\Omega$ .

Dans la suite on ne considère que le cas de l'équilibre sous l'action d'une densité surfacique (pour ce problème 2D) de forces  $\vec{f}$ . L'équation d'équilibre dit indéfini s'écrit :

$$\operatorname{div}^x \sigma + \vec{f} = 0 \text{ dans } \Omega$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes ;  $\vec{x}$  est la variable du domaine  $\Omega$ , elle est dite variable eulérienne.

Cette équation est écrite sur un domaine inconnu puisque  $\Omega = \vec{\varphi}(\Omega_R)$  et que le placement  $\vec{\varphi}$  est inconnu. Pour écrire l'équation d'équilibre sur le domaine  $\Omega_R$  connu, il faut effectuer le changement de variables  $\vec{X} \leftrightarrow \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{X})$  ce qui est facilité par l'utilisation de la formulation faible qui s'écrit :

$$\forall \vec{w}, \vec{w} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, - \int_{\Omega} \sigma : \nabla^x \vec{w} \, ds^x + \int_{\Omega} \vec{f} \, ds^x = 0$$

On définit la transformation linéaire tangente  $F$  par :

$$F = \nabla^X \vec{\varphi}$$

et dans le changement de variables  $\vec{X} \leftrightarrow \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{X})$ , on a :

$$\begin{aligned} \nabla^x \vec{w} &= \nabla^X \vec{w} \circ F \\ ds^x &= \det F ds^X \end{aligned}$$

La formulation faible devient :

$$\begin{aligned} \forall \vec{w}, \vec{w} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_R, - \int_{\Omega_R} \sigma : (\nabla^X \vec{w} \circ F^{-1}) \det F ds^X \\ + \int_{\Omega_R} \vec{f} \det F ds^X = 0 \end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire :

$$\forall \vec{w}, \vec{w} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_R, - \int_{\Omega_R} T : \nabla^X \vec{w} ds^X + \int_{\Omega_R} \vec{f} ds^X = 0$$

où :

$$\begin{aligned}\vec{\tilde{f}} &= \vec{f} \det F \\ T &= \det F \sigma : \circ F^{-T}\end{aligned}$$

$T$  est le premier tenseur de Piola Kirchhoff, en abrégé PK1. Une intégration par parties montre que le tenseur  $T$  vérifie l'équation d'équilibre :

$$\operatorname{div}^X T + \vec{\tilde{f}} = 0 \text{ dans } \Omega_R$$

Le seul comportement considéré dans ce paragraphe est l'élasticité qui se traduit par une relation, en général non linéaire, entre  $T$  et la transformation linéaire tangente  $F$  :

$$T = \mathcal{T}(\vec{X}, F)$$

La variable  $\vec{X}$  est là pour souligner que le milieu est hétérogène. Comme dans le cas linéaire, on écrit pour un milieu périodique :

$$T = \mathcal{T}^\epsilon(\vec{X}, F) = \mathcal{T}\left(\frac{\vec{X}}{\epsilon}, F\right)$$

où  $\mathcal{T}(\vec{Y}, F)$  est une fonction définie sur  $Y_R \times \mathcal{L}(V)$ ,  $Y_R$  étant une cellule de référence.

On est amené par conséquent à effectuer l'homogénéisation sur le système d'équations :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}^X T^\epsilon + \vec{f} &= 0 \text{ dans } \Omega_R \\ T^\epsilon &= \mathcal{T} \left( \frac{\vec{X}}{\epsilon}, F^\epsilon \right) \text{ dans } \Omega_R \\ F^\epsilon &= \nabla^X \vec{\varphi}^\epsilon\end{aligned}$$

Mise à part la loi de comportement qui n'est pas linéaire, ce système d'équations est proche de celui du cas linéaire,  $\Omega$  étant remplacé par  $\Omega_R$ ,  $\sigma^\epsilon$  par  $T^\epsilon$  et  $\vec{u}^\epsilon$  par  $\vec{\varphi}^\epsilon$ .



On cherche le placement  $\vec{\varphi}^\epsilon$  sous la forme du développement asymptotique :

$$\vec{\varphi}^\epsilon(\vec{x}) = \vec{\varphi}^{(0)}(\vec{X}) + \epsilon \vec{\varphi}^{(1)}\left(\vec{X}, \frac{\vec{X}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 \vec{\varphi}^{(2)}\left(\vec{X}, \frac{\vec{X}}{\epsilon}\right) + \dots$$

où les  $\vec{\varphi}^{(n)}(\vec{X}, \vec{Y})$  sont  $Y$ -périodiques de période  $Y_R$ .

Par dérivation, il vient :

$$F^\epsilon = \nabla^X \vec{\varphi}^\epsilon = \nabla^X \vec{\varphi}^{(0)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(1)} + \epsilon \left( \nabla^X \vec{\varphi}^{(1)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(2)} \right) + \dots$$

On suppose que  $\mathcal{T}\left(\frac{\vec{X}}{\epsilon}, F^\epsilon\right)$  se développe en :

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}\left(\frac{\vec{X}}{\epsilon}, \nabla^X \vec{\varphi}^{(0)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(1)} + \epsilon \left(\nabla^X \vec{\varphi}^{(1)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(2)}\right) + \dots\right) \\ &= \mathcal{T}\left(\frac{\vec{X}}{\epsilon}, \nabla^X \vec{\varphi}^{(0)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(1)}\right) + \epsilon \nabla_F \mathcal{T} \circledast \left(\nabla^X \vec{\varphi}^{(1)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(2)}\right) + \dots \end{aligned}$$

ce qui entraîne que le PK1 se développe en :

$$T^\epsilon = T^{(0)} + \epsilon T^{(1)} + \dots$$

avec en particulier :

$$T^{(0)} = \mathcal{T}\left(\frac{\vec{X}}{\epsilon}, \nabla^X \vec{\varphi}^{(0)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(1)}\right)$$

On obtient l'équation d'équilibre macroscopique comme dans le cas linéaire :

$$\operatorname{div}^Y \langle T^{(0)} \rangle_{Y_R} + \langle \vec{f} \rangle_{Y_R} = 0$$

La loi de comportement macoscopique s'obtient par la résolution d'un problème sur la cellule  $Y_R$  qui s'énonce :  
 Etant donné  $F^{(0)} = \nabla^X \vec{\varphi}^{(0)}$ , trouver  $\vec{\varphi}^{(1)} (\vec{X}, \vec{Y})$  défini  $Y_R$  tel que :

$$\operatorname{div}^Y T^{(0)} = 0$$

$$T^{(0)} = \mathcal{T} \left( \frac{\vec{X}}{\epsilon}, F^{(0)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(1)} \right)$$

$$\vec{\varphi}^{(1)} \text{ égal sur les bords opposés de } \partial Y_R$$

$$T^{(0)} \otimes \vec{N} \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y_R$$

Ce problème résolu, on obtient la loi de comportement par une moyenne sur  $Y_R$  :

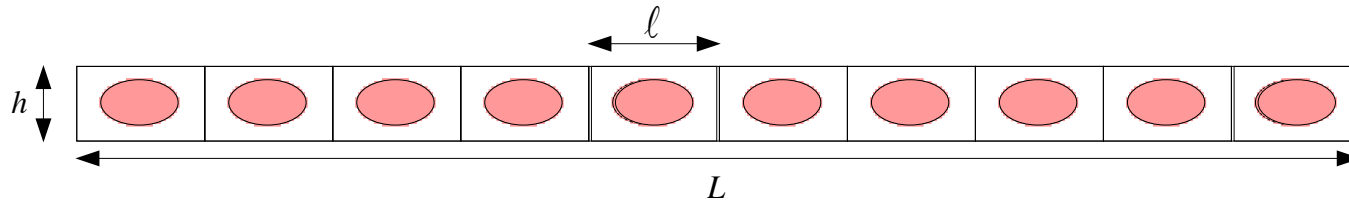
$$\langle T^{(0)} \rangle = \frac{1}{|Y_R|} \int_{Y_R} \mathcal{T} \left( \frac{\vec{X}}{\epsilon}, F^{(0)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(1)} \right) ds^Y$$

Par contre, contrairement au cas linéaire, le problème sur  $Y_R$  ne l'est pas, linéaire, et on peut pas déterminer la loi de comportement par la résolution d'un nombre fini de problème sur  $Y_R$ . A chaque fois que la loi homogénéisée est utilisée, il faut résoudre le problème pour la donnée  $F^{(0)}$ .

Dans un calcul par éléments finis à l'échelle macroscopique utilisant la méthode de Newton, à chaque point de Gauss et à chaque itération de la méthode de Newton, il faut résoudre le problème par éléments finis, d'où le nom de la méthode EF<sup>2</sup>, *éléments finis au carré*.

# Problèmes à plusieurs paramètres - modèles multiphysiques

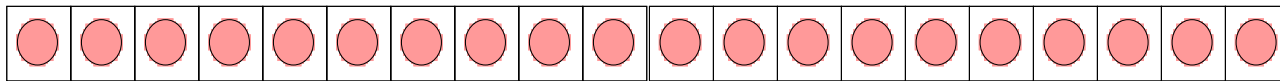
## Milieux périodiques minces



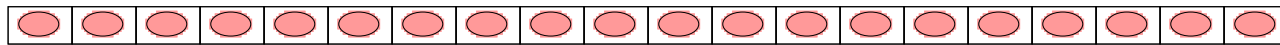
$$h \rightarrow 0$$



$$\epsilon \rightarrow 0$$



$$h \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0, \epsilon = \lambda h$$



## Conclusion

La méthode asymptotique permet de déterminer le modèle macroscopique équivalent d'un milieu finement hétérogène, lois de conservation et de comportement.

Elle est applicable s'il y a séparation d'échelles. La petitesse de la dimension des périodes devant celle du milieu n'est pas suffisante pour juger de cette séparation d'échelles. Les sollicitations auxquelles est soumis le milieu sont aussi importantes.

Les milieux hétérogènes sont assez rarement périodiques et l'homogénéisation des milieux périodiques n'est peut-être qu'un amusement de chercheurs.

Les conditions de périodicité appliquées à la frontière de la

cellule de périodicité sont plus « souples » que des conditions de type déformation homogène ou contrainte homogène imposées.

La méthode asymptotique est un moyen efficace de déterminer des modèles macroscopiques équivalents d'un milieu finement hétérogène. Le plus souvent ce modèle est attendu, l'homogénéisation d'un milieu élastique va donner un milieu élastique mais ce n'est pas toujours le cas, l'homogénéisation d'un milieu poreux saturé d'un fluide visqueux va mener au modèle consolidation de Biot.



## Solutions des exercices

### Homogénéisation de la barre

Equations de la barre :

$$\frac{dN}{dx} + f = 0$$

$$N = k \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \frac{du}{dx}$$

### Développements asymptotiques

$$u^\epsilon(x) = u^{(0)}(x) + \epsilon u^{(1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 u^{(2)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

$$\frac{du^\epsilon}{dx} = \frac{du^{(0)}}{dx} + \frac{du^{(1)}}{dy} + \epsilon \left( \frac{du^{(1)}}{dx} + \frac{du^{(2)}}{dy} \right) + \dots$$

$$N^\epsilon(x) = N^{(0)} + \epsilon N^{(1)} + \epsilon^2 N + \dots$$

Le développement de la loi de comportement  $N = k \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \frac{du}{dx}$  donne :

$$N^{(0)} = k(y) \left( \frac{du^{(0)}}{dx} + \frac{du^{(1)}}{dy} \right)$$

$$N^{(1)} = k(y) \left( \frac{du^{(1)}}{dx} + \frac{du^{(2)}}{dy} \right)$$

.....

Le développement de l'équation d'équilibre donne

$$\frac{dN^{(0)}}{dy} = 0$$
$$\frac{dN^{(0)}}{dx} + \frac{dN^{(1)}}{dy} + f = 0$$
$$\frac{dN^{(1)}}{dx} + \frac{dN^{(2)}}{dy} = 0$$

## Poutre de Navier Bernouilli

$$\frac{dT}{dx} + p = 0$$

$$\frac{dM}{dx} - T = 0$$

$$M = EI \frac{d\theta}{dx}$$

$$\theta + \frac{dw}{dx} = 0$$

## Développements asymptotiques

$$w^\epsilon(x) = w^{(0)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon w^{(1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 w^{(2)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

$$\theta^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \theta^{(-1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \theta^{(0)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon \theta^{(1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 \theta^{(2)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

$$M^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^2} M^{(-2)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{1}{\epsilon} M^{(-1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + M^{(0)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \\ + \epsilon M^{(1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 M^{(2)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$



$$T^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^3} T^{(-3)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{1}{\epsilon^2} T^{(-2)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{1}{\epsilon} T^{(-1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \\ + T^{(0)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon T^{(1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 T^{(2)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

Développement des équations

Ordre le plus bas

$$\begin{aligned}\frac{dT^{(-3)}}{dy} &= 0 \\ \frac{dM^{(-2)}}{dy} - T^{(-3)} &= 0 \\ M^{(-2)} &= EI \frac{d\theta^{(-1)}}{dy} \\ \theta^{(-1)} + \frac{dw^{(0)}}{dy} &= 0\end{aligned}$$