École d'été **18 Septembre 2012**

Méthodes Asymptotiques en Mécanique *Quiberon*

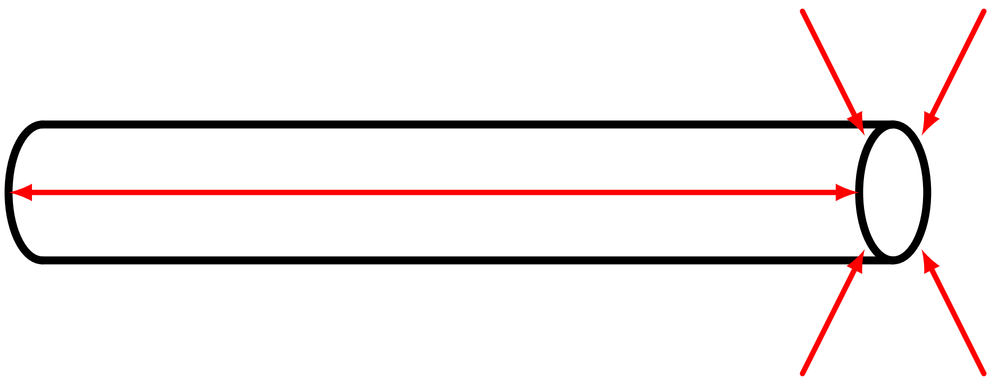
Théorie des poutres élastiques :

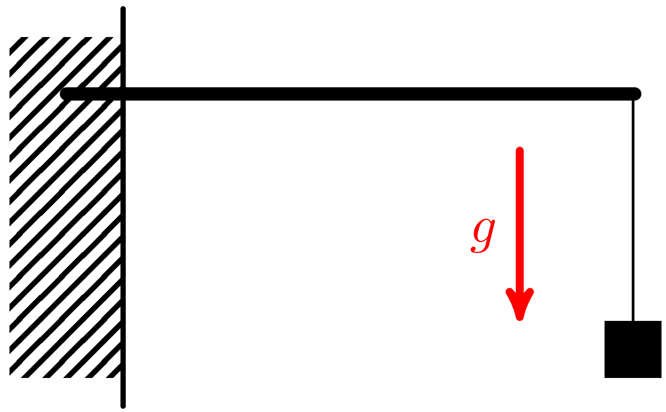
du milieu continu 3D au 1D

Patrick BALLARD

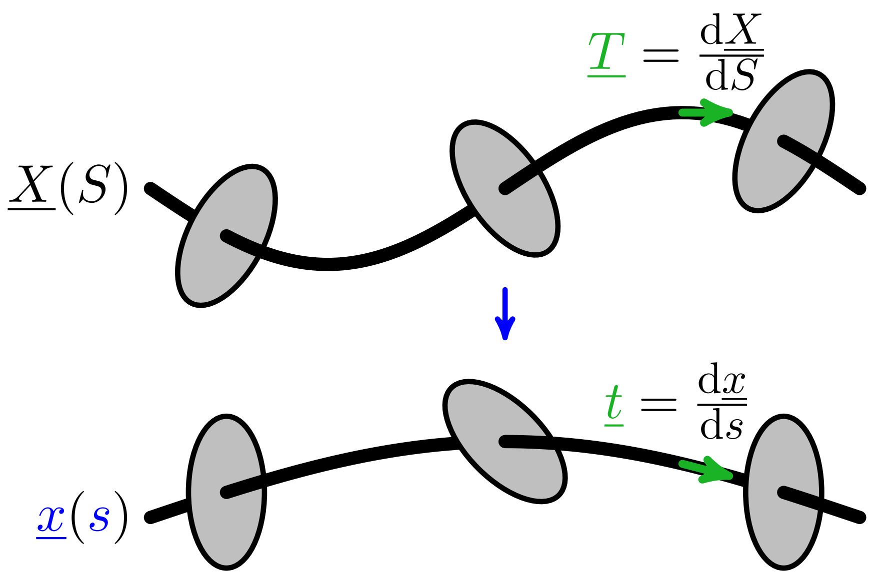
Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique,
Marseille - FRANCE.

Poutre = objet tridim. élancé (1 grande dim. et 2 petites)





Modèle simplifié : milieu de Cosserat curviligne



Description **Lagrangienne** du mouvement.

$$S \quad \longrightarrow \quad \Big(\underline{x}(S), \underline{\underline{R}}(S)\Big), \qquad {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}}.$$

Description **Eulerienne**. Champ de distributeur sur config. actuelle ligne moyenne.

$$\Big\{\underline{V}(s), \underline{\Omega}(s)\Big\}_{\underline{x}(s)}$$

	Milieu continu 3D	Poutre
Transformation	$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X})$	$\left(\underline{x}(S)\,,\,\underline{\underline{R}}(S)\right)$
Description eulerienne	$\underline{v}(\underline{x})$	$\left\{\underline{V}(s)\,,\,\underline{\Omega}(s)\right\}_{\underline{x}(s)}$
Déformation Lagrangienne	$\underline{\underline{e}}(\underline{X}) = \frac{1}{2}\left({}^{t}\underline{\underline{\nabla}}\underline{\phi} \cdot \underline{\underline{\nabla}}\underline{\phi} - \underline{\underline{1}}\right)$	$\mathbb{E} = \left(\underbrace{{}^{t}\underline{\underline{R}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\underline{x} - \underline{T}}_{\underline{E}}\,,\, \underbrace{{}^{t}\underline{\underline{R}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\underline{\underline{R}}}_{\underline{\underline{W}} \leftrightarrow \underline{W}}\right)$
Déplacement	$\underline{u}(\underline{X})$	$\left(\underline{\overline{u}}(S)\,,\,\underline{\underline{R}}(S) - \underline{\underline{1}}\right)$
Hyp. transform. infinit.	$\lvert\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}\rvert \ll 1$	$\left\lvert\frac{\mathrm{d}\underline{\overline{u}}}{\mathrm{d}S}\right\rvert \ll 1$ et $\lvert\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}\rvert \ll 1$
Déplacement linéarisé	$\underline{u}(\underline{X})$	$\left\{\underline{\overline{u}}(S)\,,\,\underline{\theta}(S)\right\}$
Déformation linéarisée	$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} + {}^{t}\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}\right)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\left\{\underline{\overline{u}}(S)\,,\,\underline{\theta}(S)\right\}_{\underline{X}(S)}$
Contrainte Eulerienne	$\underline{\underline{\sigma}}$	$\left[\underline{R}(s), \underline{M}(s)\right]_{\underline{x}(s)}$
Équilibre	$\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$	$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\underline{R}(s), \underline{M}(s)\right]_{\underline{x}(s)}}_{\left[\frac{\mathrm{d}\underline{R}}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}\underline{M}}{\mathrm{d}s} + \underline{t} \wedge \underline{R}\right]} = \left[\underline{0}, \underline{0}\right]$
Contrainte Lagrangienne	$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{\rho_0}{\rho}\,\underline{\underline{\nabla}}\underline{\phi}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^{t}\underline{\underline{\nabla}}\underline{\phi}^{-1}$	$\left[\underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}}\right] = \left[{}^{t}\underline{\underline{R}} \cdot \underline{R},\, {}^{t}\underline{\underline{R}} \cdot \underline{M}\right]$

Problématique de la loi de comportement élastique

Loi hypo-élastique : $[\underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}}] = \mathcal{F}(\mathbb{E})$ Loi hyper-élastique : $[\underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}}] = \dfrac{\partial \psi}{\partial \mathbb{E}}(\mathbb{E})$

$$[\underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}}] = \left[{}^{\mathsf{t}}\underline{\underline{R}} \cdot \underline{R},\ {}^{\mathsf{t}}\underline{\underline{R}} \cdot \underline{M}\right], \quad \mathbb{E} = \left(\underline{E}, \underline{W}\right), \quad \underline{E} = {}^{\mathsf{t}}\underline{\underline{R}} \cdot \frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}S} - \underline{T}, \quad \underline{W} \leftrightarrow \underline{\underline{W}} = {}^{\mathsf{t}}\underline{\underline{R}} \cdot \frac{\mathrm{d}\underline{\underline{R}}}{\mathrm{d}S}$$

Linéarisation sous l'hyp. de la déformation infinitésimale : $|\underline{E}| \ll 1, \quad D\,|\underline{W}| \ll 1,$

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathcal{R}} \\ \underline{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{W} \end{pmatrix}$$

Prise en compte de **liaisons internes**.

- **Navier-Bernoulli** : les sections restent orthogonales à la ligne moyenne

  $\underline{E} \wedge \underline{T} = \underline{0}, \qquad \left(\underline{\mathcal{R}}\ \underline{\mathcal{M}}\right) = \underline{\underline{A}}\left(\underline{E}\ \underline{W}\right) + \left(\underline{\eta}, \underline{0}\right),$ avec $\underline{\eta}$ arbitraire tq $\underline{\eta} \cdot \underline{T} = 0$.

- **Navier-Bernoulli inextensible** :

  $\underline{E} = \underline{0}, \qquad \left(\underline{\mathcal{R}}\ \underline{\mathcal{M}}\right) = \underline{\underline{A}}\left(\underline{E}\ \underline{W}\right) + \left(\underline{\eta}, \underline{0}\right),$ avec $\underline{\eta}$ arbitraire.

Exemple classique : loi standard inextensible.

$\underline{E} = \underline{0}, \qquad \underline{\mathcal{M}} = \mu J\ \left(\underline{W} \cdot \underline{T}\right) \underline{T} + E\underline{\underline{I}} \cdot \underline{W}_{\perp},$ où :

$$\underline{W} = \left(\underline{W} \cdot \underline{T}\right) \underline{T} + \underline{W}_{\perp}$$

$$\underline{\underline{I}} = \int_{\mathcal{S}} \left|\underline{Gm}\right|^2 \underline{\underline{\mathbb{1}}} - \underline{Gm} \otimes \underline{Gm}$$

Dynamique non-linéaire d'une poutre : équations de Kirchhoff

- Équation du mouvement :

$$\Big[\underline{R}(L)\,,\,\underline{M}(L)\Big] = \Big[\underline{F}_L\,,\,\underline{C}_L\Big],$$

$$\left[\frac{\partial \underline{R}}{\partial S},\,\frac{\partial \underline{M}}{\partial S} + \left(\underline{T} + \frac{\partial \underline{\overline{u}}}{\partial S}\right) \wedge \underline{R}\right] + \Big[\underline{\overline{F}}_0\,,\,\underline{\overline{C}}_0\Big] = \Big[\overline{\rho}_0\,\underline{\dot{V}}\,,\,\underbrace{\underline{\underline{i}}^{\rho}_0 \cdot \underline{\dot{\Omega}} + \underline{\Omega} \wedge \big(\underline{\underline{i}}^{\rho}_0 \cdot \underline{\Omega}\big)}_{\simeq\, 0\ !}\Big],$$

- Loi de comportement élastique linéarisée :

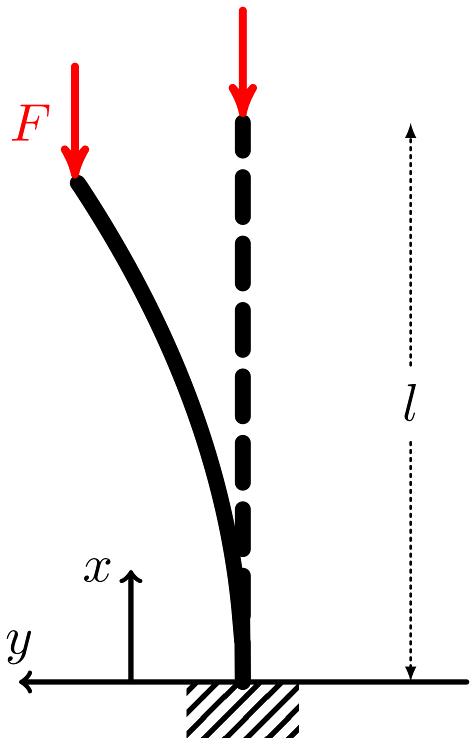
$$\begin{pmatrix} {}^{\mathsf{t}}\underline{\underline{R}} \cdot \underline{R} \\ {}^{\mathsf{t}}\underline{\underline{R}} \cdot \underline{M} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{W} \end{pmatrix},$$

- Conditions cinématiques :

$$\Big(\underline{\overline{u}}(0)\,,\,\underline{\underline{R}}(0) - \underline{\underline{\mathbb{1}}}\Big) = \Big(\underline{\overline{u}}_0\,,\,\underline{\underline{R}}_0 - \underline{\underline{\mathbb{1}}}\Big),$$

$$\underline{E} = \left({}^{\mathsf{t}}\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{\mathbb{1}}}\right) \cdot \underline{T} + {}^{\mathsf{t}}\underline{\underline{R}} \cdot \frac{\partial \underline{\overline{u}}}{\partial S}, \qquad \underline{\underline{W}} = {}^{\mathsf{t}}\underline{\underline{R}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial S}, \qquad \underline{V} = \frac{\partial \underline{\overline{u}}}{\partial t}, \qquad \underline{\underline{\Omega}} = \frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial t} \cdot {}^{\mathsf{t}}\underline{\underline{R}}.$$

Instabilités : l'exemple archétypal du flambage d'Euler

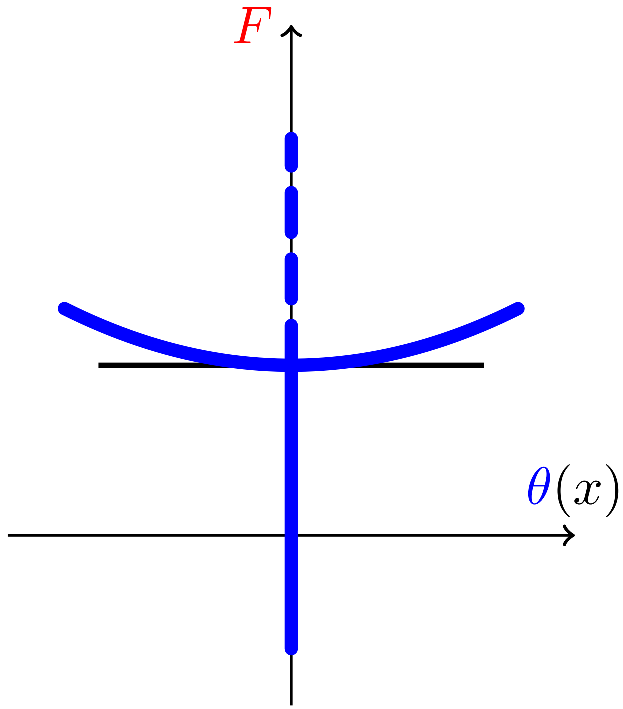


Équilibre en rotation finie :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\theta(x) + \frac{F}{EI}\sin\theta(x) = 0,$$
$$\theta(0) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(l) = 0.$$

Transformation infinitésimale autour d'un état précontraint rectiligne :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\theta(x) + \frac{F}{EI}\theta(x) = 0,$$
$$\theta(0) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(l) = 0.$$

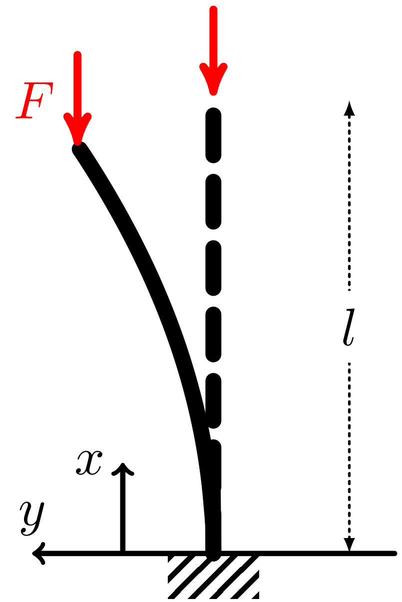


Les solutions non-triviales correspondantes sont les **modes de bifurcation** :

$$F = (2n+1)^2\frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \theta(x) = C^{\text{te}}\sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}\,x\right) = C^{\text{te}}\sin\left((2n+1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{l}\right).$$

Analyse de stabilité de la configuration rectiligne

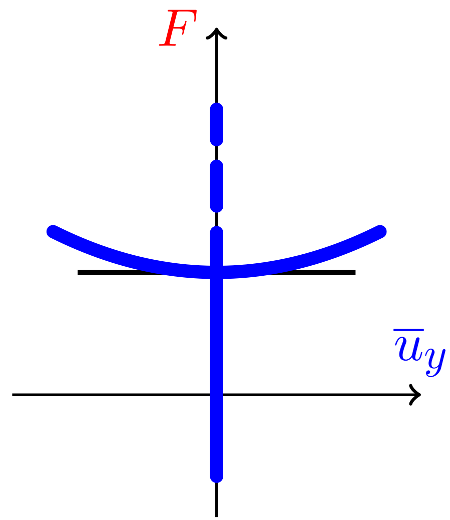
Équilibre linéarisé autour de l'état précontraint : formulation faible.



$\forall \omega(x)$ tel que $\omega(0) = 0$,

$$\underbrace{\int_0^l EI\,\theta'(x)\,\omega'(x)\,\mathrm{d}x}_{\substack{K_{\text{él}}(\theta,\omega) \\ \text{rigidité élastique}}} - \underbrace{F\int_0^l \theta(x)\,\omega(x)\,\mathrm{d}x}_{\substack{F\,K_{\text{géom}}(\theta,\omega) \\ \text{rigidité géométrique}}} = 0.$$

Dynamique linéarisée autour de l'état précontraint (avec $\theta = \overline{u}_y'$) :



$$\overline{\rho}_0\,\ddot{\overline{u}}_y + EI\,\overline{u}_y'''' + F\,\overline{u}_y'' = 0$$

$$\updownarrow$$

$$\overline{\rho}_0\,\ddot{\overline{u}}_y + \left(K_{\text{él}} + F\,K_{\text{géom}}\right)\cdot\overline{u}_y = 0$$

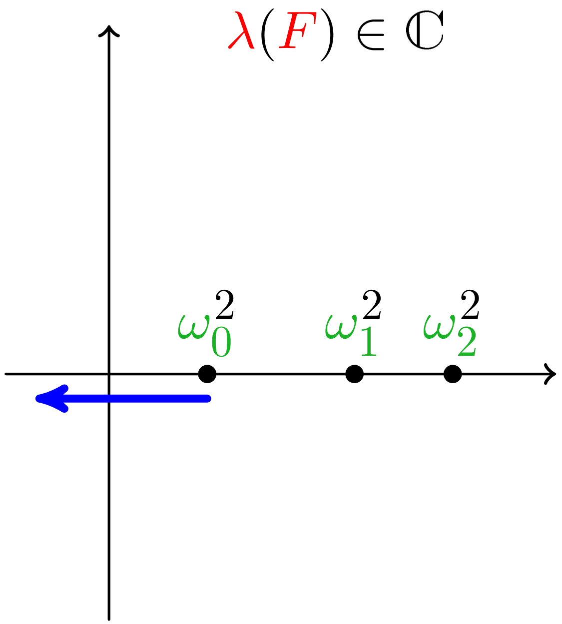
Inventaire des mécanismes de déstabilisation

Dynamique en TIEP : $\quad \overline{\rho}_0\, \ddot{\underline{\overline{u}}} + \left(K_{\text{él}} + K_{\text{géom}}(F)\right) \cdot \underline{\overline{u}} = 0.$

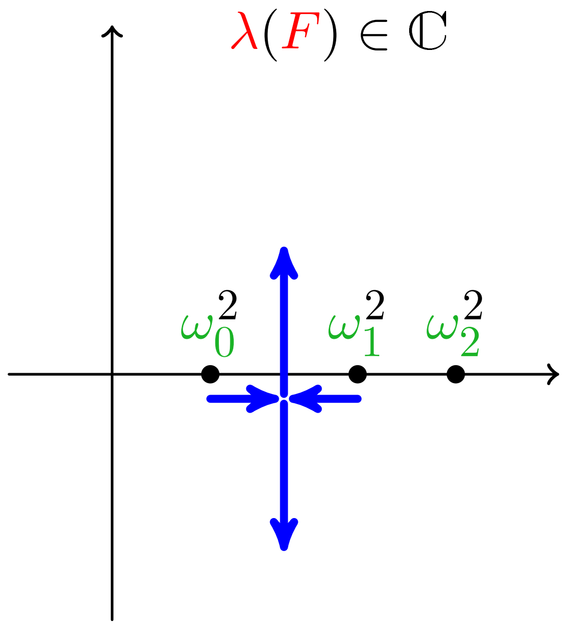
Recherche de sol. à variables séparées $\underline{\overline{u}}(S,t) = q(t)\, \underline{\overline{u}}^*(S)$

$$\ddot{q}(t) + \lambda(F) q(t) = 0$$

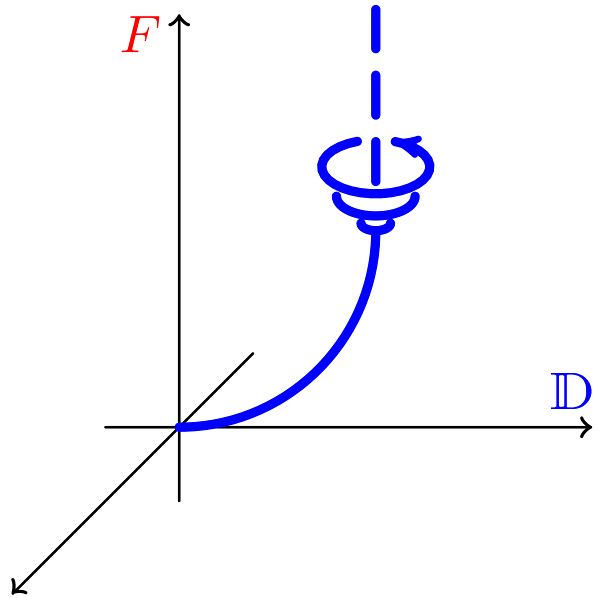
Stabilité $\quad \Longleftrightarrow \quad \lambda(F) \in \mathbb{R}^+$



Point critique

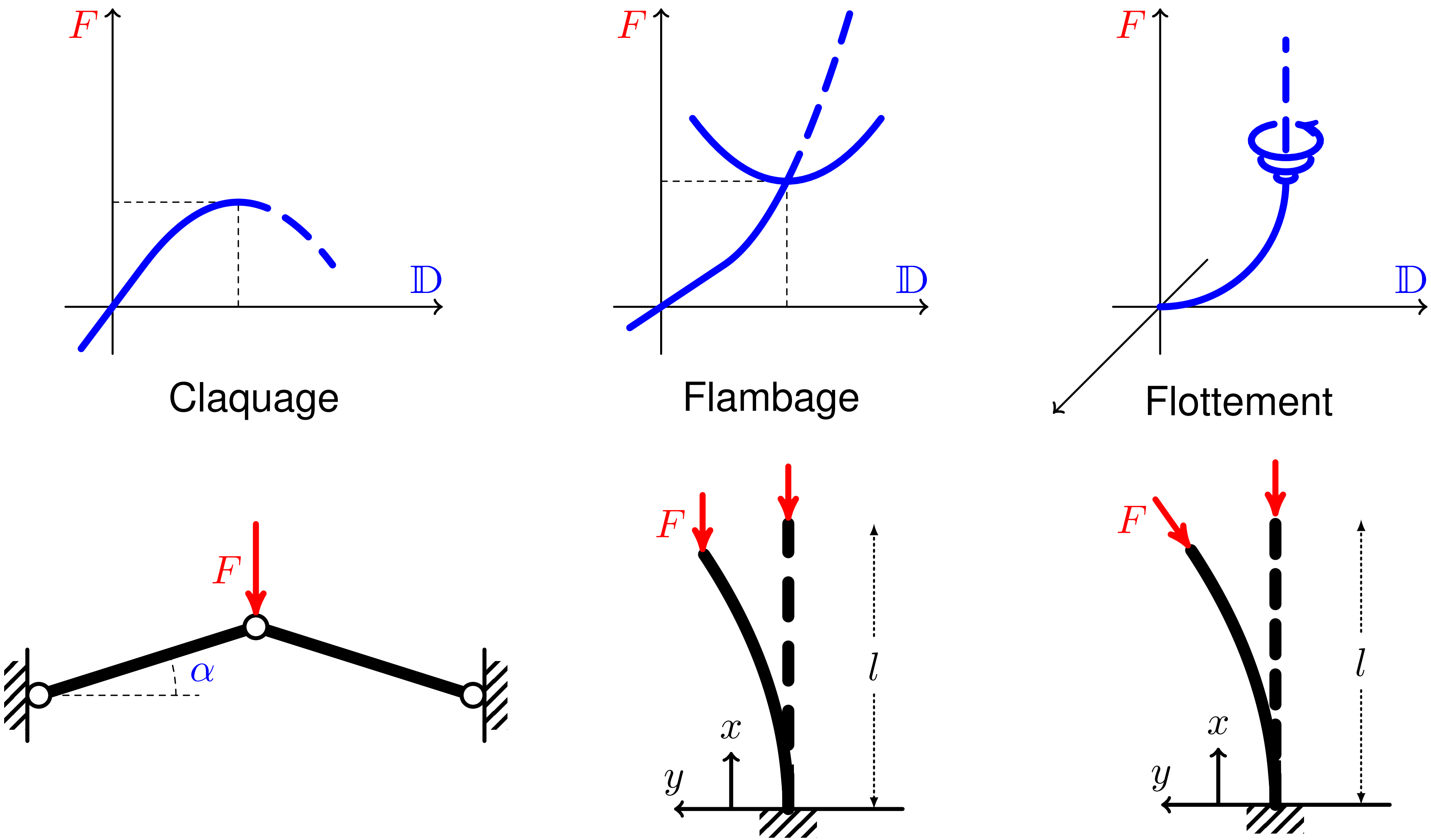


Flottement



Bifurcation de Hopf

En résumé : trois types d'instabilités,…



…, un seul outil d'analyse : les équations du cadre TIEP

Théorie des poutres et élasticité tridimensionnelle

Théorie des poutres : pari (osé !) sur la cinématique.

$\rightarrow$ **Problématiques**

- de nature théorique : cohérence de la théorie des poutres et MMC 3D. Justification du pari à partir de l'élasticité 3D.
- de nature pratique : la loi de comportement élastique dépend de la géométrie de la section. Il faut donc une méthode systématique pour la calculer à partir de la connaissance de la géométrie et du matériau constitutif.

Rappel : la loi de comportement **standard inextensible**.

$$\underline{E} = \underline{0}, \qquad \underline{\mathcal{M}} = \mu J \left(\underline{W} \cdot \underline{T}\right) \underline{T} + E \underline{\underline{I}} \cdot \underline{W}_{\perp}, \quad \text{où :} \quad \left| \begin{array}{l} \underline{W} = \left(\underline{W} \cdot \underline{T}\right) \underline{T} + \underline{W}_{\perp} \\ \underline{\underline{I}} = \displaystyle\int_{\mathcal{S}} \left|\underline{Gm}\right|^2 \underline{\underline{\mathbb{1}}} - \underline{Gm} \otimes \underline{Gm} \end{array} \right.$$

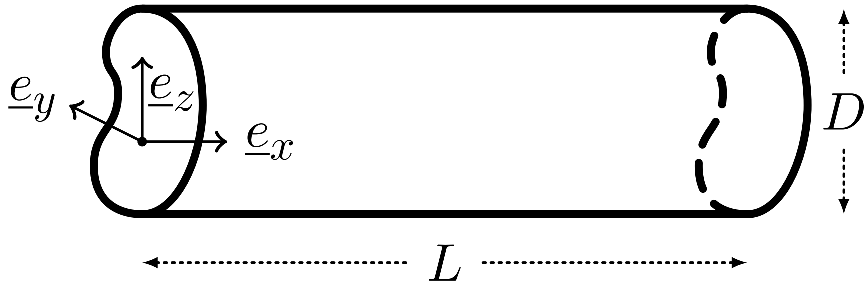
nécessité d'examiner comment se comportent (asymptotiquement) les solutions de l'élasticité 3D dans un cylindre quand l'élancement tend vers l'infini

Cas particulier (essentiel) des théories linéarisées (HPP)

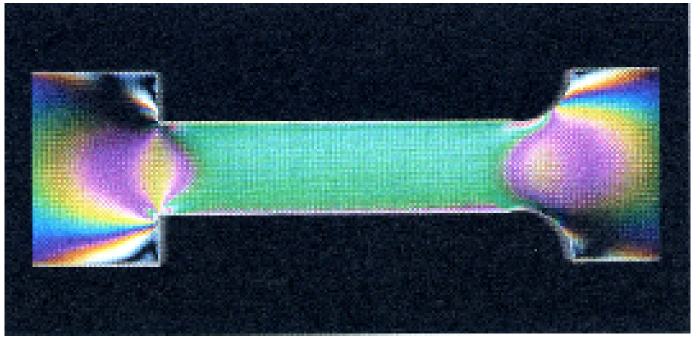
Élastostatique HPP des cylindres sollicités exclusivement en leurs sections extrêmes

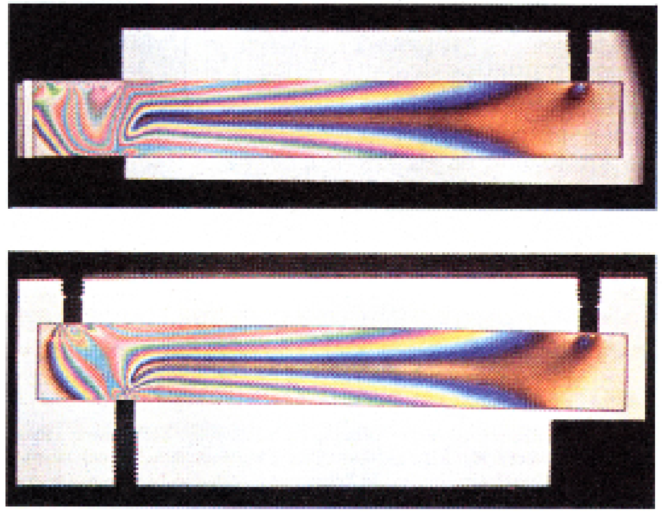
matériau homogène isotrope E, ν

$$\int_{\mathcal{S}} y = \int_{\mathcal{S}} z = \int_{\mathcal{S}} yz = 0, \quad I_y = \int_{\mathcal{S}} z^2, \quad I_z = \int_{\mathcal{S}} y^2$$



Principe de de Saint-Venant





d'après J. SALENÇON.

On se donne le torseur des efforts surf. sur $\mathcal{S}_L$.

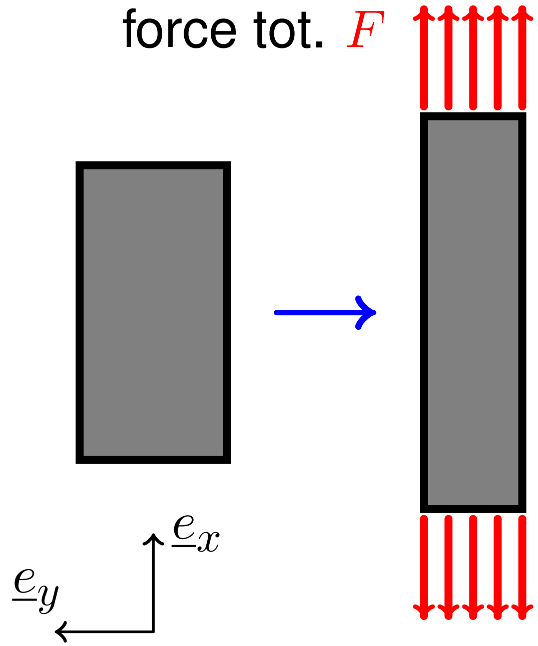
$$\mathbb{T} = \left[F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z \,, \, C_x \underline{e}_x + C_y \underline{e}_y + C_z \underline{e}_z \right]$$

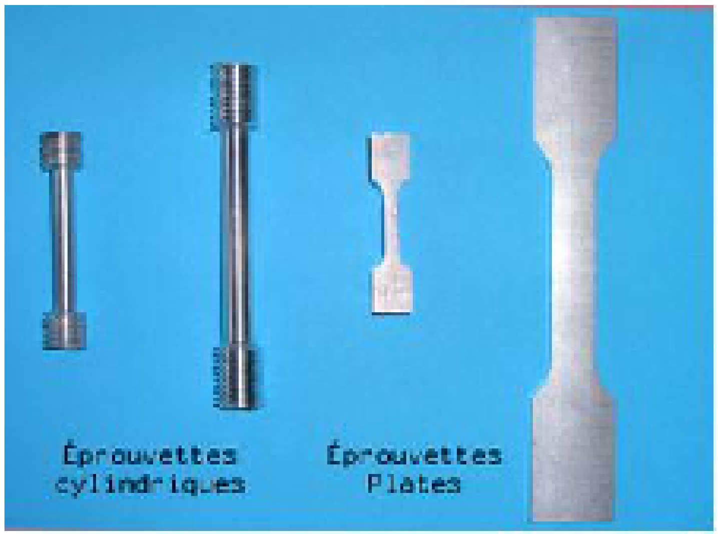
Traction-compression simple

Contrainte homogène et uniaxiale et déplacement affine des coordonnées :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} F_x/|\mathcal{S}| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{F_x}{E|\mathcal{S}|}x \\ -\dfrac{\nu F_x}{E|\mathcal{S}|}y \\ -\dfrac{\nu F_x}{E|\mathcal{S}|}z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{déplacement rigidifiant infinitésimal arbitraire}} .$$

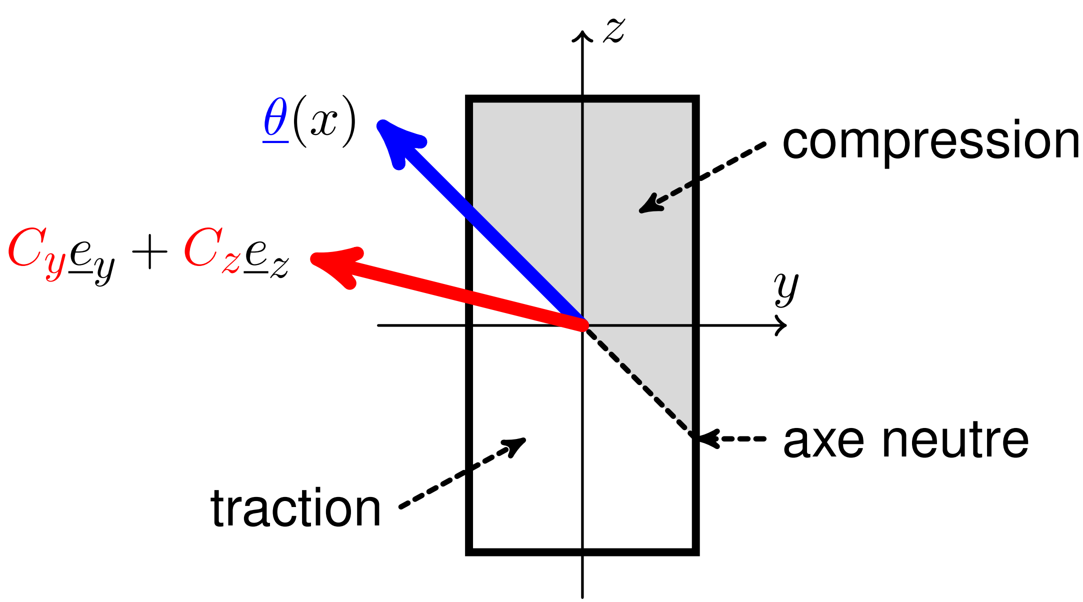




Effet « Poisson ».

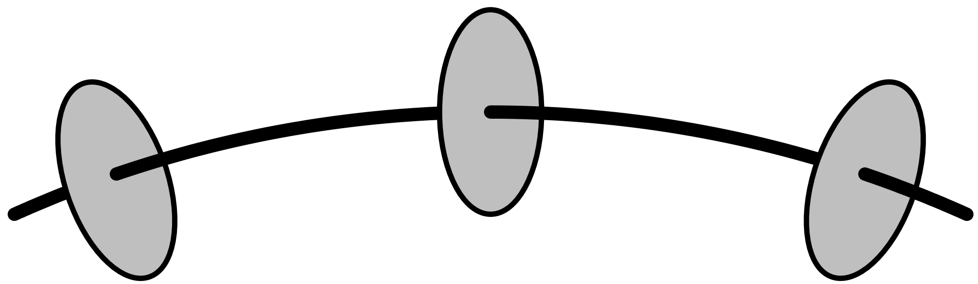
Flexion pure $\Leftrightarrow$ flexion circulaire

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{C_z}{I_z}y + \dfrac{C_y}{I_y}z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$



$$\underline{u} = \begin{pmatrix} -\dfrac{C_z}{EI_z}xy + \dfrac{C_y}{EI_y}xz \\ \dfrac{C_z}{2EI_z}\left[x^2 + \nu(y^2 - z^2)\right] - \dfrac{\nu\, C_y}{EI_y}yz \\ \dfrac{\nu\, C_z}{EI_z}yz - \dfrac{C_y}{2EI_y}\left[x^2 - \nu(y^2 - z^2)\right] \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\theta}(x) = x\left(\frac{C_y}{EI_y}\underline{e}_y + \frac{C_z}{EI_z}\underline{e}_z\right).$$



Torsion et gauchissement des sections

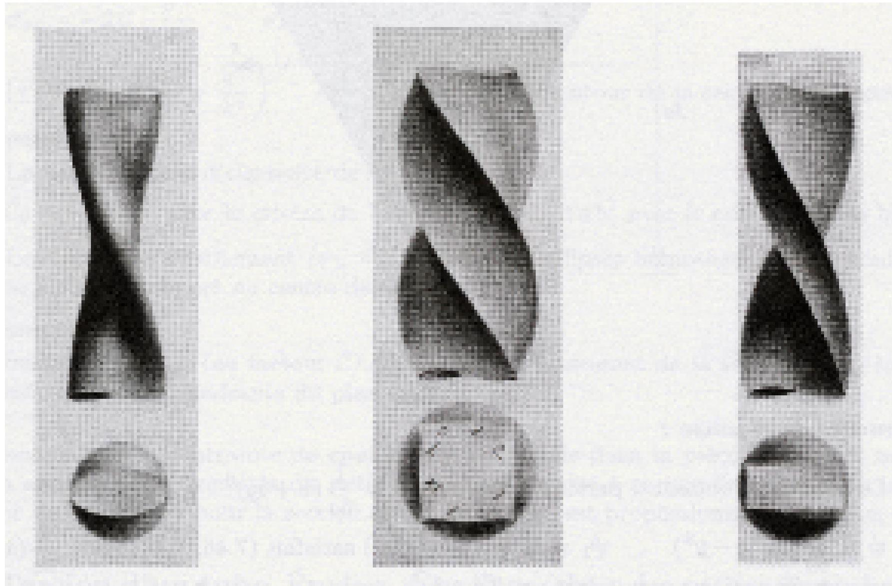
$$\underline{u} = \frac{2(1+\nu)C_x}{EJ}\begin{pmatrix}\psi(y,z)\\ -xz\\ xy\end{pmatrix} = \underbrace{\frac{2(1+\nu)C_x}{EJ}\, x\,\underline{e}_x \wedge \left(y\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z\right)}_{\text{rotation infinitésimale des sections}} + \underbrace{\frac{2(1+\nu)C_x}{EJ}\,\psi(y,z)\,\underline{e}_x}_{\text{gauchissement}},$$

où la fonction de **gauchissement** $\psi(y,z)$ est l'unique (à une constante additive arbitraire près) solution du problème de Neumann :

$$\begin{aligned}\Delta_2\psi(y,z) &= 0, && \text{dans } \mathcal{S},\\ \underline{\nabla}\psi\cdot\underline{n} &= zn_y - yn_z && \text{sur } \partial\mathcal{S},\end{aligned}$$

et l'**inertie de torsion** J est le réel (>0) défini à partir de la solution ψ du problème de Neumann par :

$$J = \int_{\mathcal{S}} y^2 + z^2 + y\frac{\partial\psi}{\partial z} - z\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$



Flexion simple $\Leftrightarrow$ flexion par effort tranchant

Cas où la section est un disque de rayon R

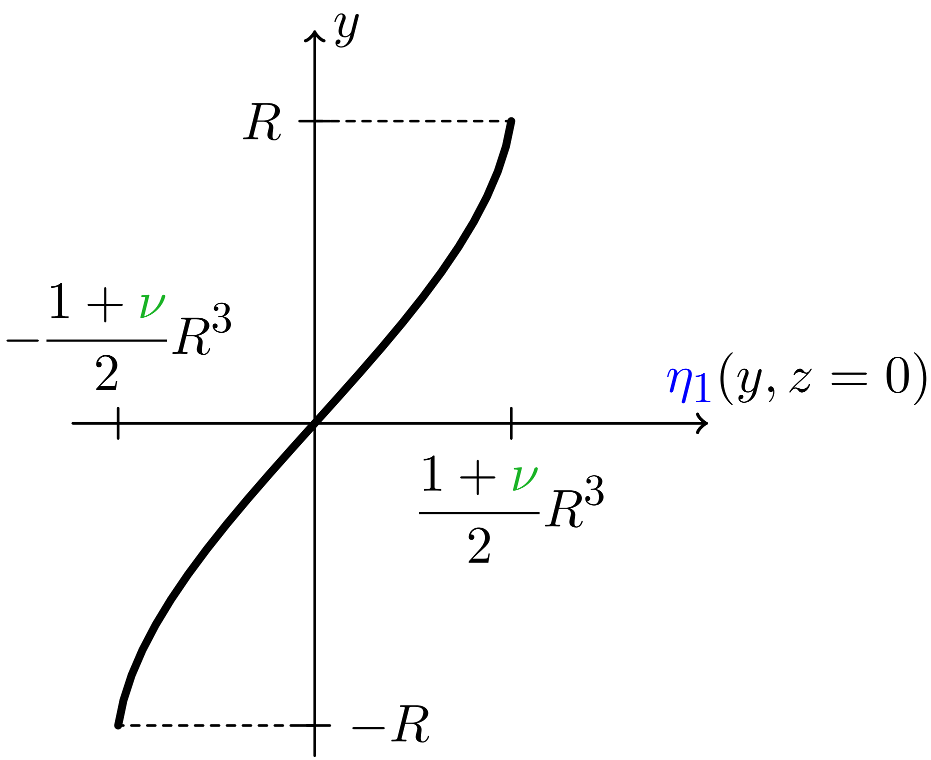
$$\underline{u} = \frac{F_y}{EI_z}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}xy(x-2L) + \eta_1(y,z) \\ -\frac{x^2}{6}(x-3L) - \frac{\nu}{2}(x-L)(y^2-z^2) \\ -\nu(x-L)yz \end{pmatrix},$$

où la fonction de **gauchissement** $\eta_1(y,z)$ est l'unique (à une constante additive près) solution du problème de Neumann :

$$\left|\begin{array}{rcll} \Delta_2\eta_1(y,z) & = & -2y, & \text{ds } \mathcal{S}, \\ \underline{\nabla}\eta_1 \cdot \underline{n} & = & \nu\left\{\frac{y^2-z^2}{2}n_y + yzn_z\right\}, & \text{sur } \partial\mathcal{S}, \end{array}\right.$$

qui est, ici, donnée explicitement par :

$$\eta_1(y,z) = \left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right)R^2y - \frac{1}{4}(yz^2 + y^3).$$



Couplage entre flexion simple et torsion

Cas où la section est de géométrie quelconque

On considère le cas : $\mathbb{T} = \left[F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z \,,\, C_x \underline{e}_x\right]$.

Résolvant les deux problèmes de Neumann :

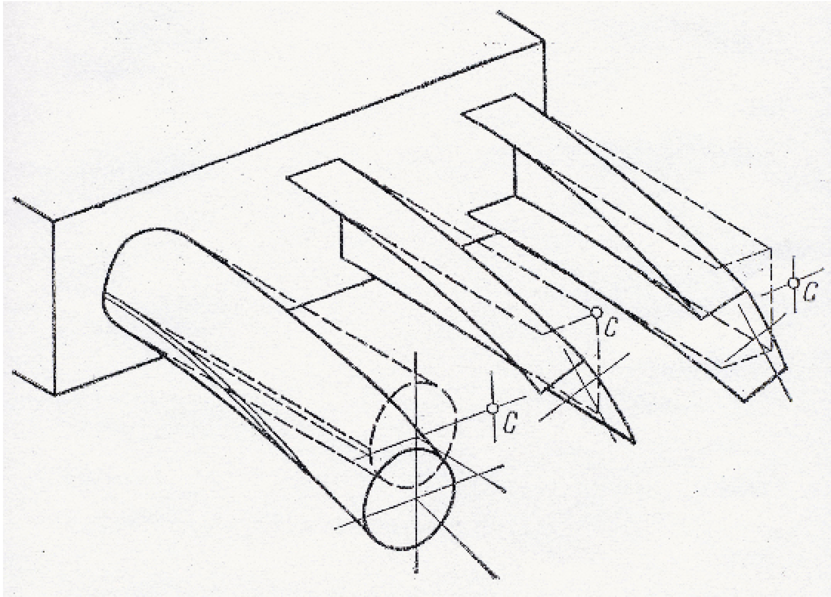
$$\left|\begin{array}{rcll} \Delta_2 \eta_1(y,z) &=& -2y, & \text{ds } \mathcal{S}, \\ \underline{\nabla} \eta_1 \cdot \underline{n} &=& \nu \left\{ \frac{y^2 - z^2}{2} n_y + yz n_z \right\}, & \text{sur } \partial\mathcal{S}, \end{array}\right.$$

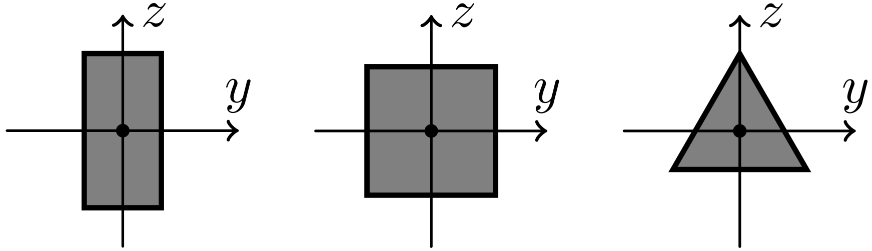
$$\left|\begin{array}{rcll} \Delta_2 \eta_2(y,z) &=& -2z, & \text{ds } \mathcal{S}, \\ \underline{\nabla} \eta_2 \cdot \underline{n} &=& \nu \left\{ yz n_y - \frac{y^2 - z^2}{2} n_z \right\}, & \text{sur } \partial\mathcal{S}, \end{array}\right.$$

on introduit le **centre de cisaillement** C :

$$y_C = \frac{1}{2(1+\nu) I_y} \int_{\mathcal{S}} \nu \frac{y^3 + yz^2}{2} + y \frac{\partial \eta_2}{\partial z} - z \frac{\partial \eta_2}{\partial y},$$

$$z_C = \frac{1}{2(1+\nu) I_z} \int_{\mathcal{S}} \nu \frac{y^2 z + z^3}{2} - y \frac{\partial \eta_1}{\partial z} + z \frac{\partial \eta_1}{\partial y},$$





$I_y \neq I_z$ $\quad$ $I_y = I_z$ $\quad$ $I_y = I_z$

$$\boxed{\theta_x(x) = \frac{C_x + z_C F_y - y_C F_z}{\mu J} x.}$$

Expression complète de la solution de Saint-Venant

$$
\begin{aligned}
u_x(x,y,z) &= \frac{F_x}{E|\mathcal{S}|}x + \frac{F_y}{EI_z}\left[\frac{xy}{2}(x-2L) + \eta_1(y,z) + \frac{2(1+\nu)z_C I_z}{J}\psi(y,z)\right] \\
&\quad + \frac{F_z}{EI_y}\left[\frac{xz}{2}(x-2L) + \eta_2(y,z) - \frac{2(1+\nu)y_C I_y}{J}\psi(y,z)\right] \\
&\quad + \frac{2(1+\nu)C_x}{EJ}\psi(y,z) + \frac{C_y}{EI_y}xz - \frac{C_z}{EI_z}xy,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_y(x,y,z) &= -\frac{\nu F_x}{E|\mathcal{S}|}y + \frac{F_z}{EI_y}\left[\nu(L-x)yz + \frac{2(1+\nu)y_C I_y}{J}xz\right] \\
&\quad + \frac{F_y}{EI_z}\left[\frac{x^2}{6}(3L-x) + \frac{\nu}{2}(L-x)(y^2-z^2) - \frac{2(1+\nu)z_C I_z}{J}xz\right] \\
&\quad - \frac{2(1+\nu)C_x}{EJ}xz - \frac{\nu C_y}{EI_y}yz + \frac{C_z}{2EI_z}(x^2+\nu y^2-\nu z^2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_z(x,y,z) &= -\frac{\nu F_x}{E|\mathcal{S}|}z + \frac{F_y}{EI_z}\left[\nu(L-x)yz + \frac{2(1+\nu)z_C I_z}{J}xy\right] \\
&\quad + \frac{F_z}{EI_y}\left[\frac{x^2}{6}(3L-x) - \frac{\nu}{2}(L-x)(y^2-z^2) - \frac{2(1+\nu)y_C I_y}{J}xy\right] \\
&\quad + \frac{2(1+\nu)C_x}{EJ}xy - \frac{C_y}{2EI_y}(x^2-\nu y^2+\nu z^2) + \frac{\nu C_z}{EI_z}yz.
\end{aligned}
$$

Solution de Saint-Venant adimensionnalisée

$$
\begin{aligned}
\frac{u_x}{L} &= e^2\frac{F_x}{EL^2|\tilde{\mathcal{S}}|}\,\tilde{x} + \frac{F_y}{EL^2\tilde{I}_z}\left[e^3\frac{\tilde{x}\tilde{y}}{2}(\tilde{x}-2) + e\,\tilde{\eta}_1(\tilde{y},\tilde{z}) + e\frac{2(1+\nu)\tilde{z}_C\tilde{I}_z}{\tilde{J}}\,\tilde{\psi}(\tilde{y},\tilde{z})\right] \\
&\quad + \frac{F_z}{EL^2\tilde{I}_y}\left[e^3\frac{\tilde{x}\tilde{z}}{2}(\tilde{x}-2) + e\,\tilde{\eta}_2(\tilde{y},\tilde{z}) - e\frac{2(1+\nu)\tilde{y}_C\tilde{I}_y}{\tilde{J}}\,\tilde{\psi}(\tilde{y},\tilde{z})\right] \\
&\quad + e^2\frac{2(1+\nu)C_x}{EL^3\tilde{J}}\,\tilde{\psi}(\tilde{y},\tilde{z}) + e^3\frac{C_y}{EL^3\tilde{I}_y}\,\tilde{x}\tilde{z} - e^3\frac{C_z}{EL^3\tilde{I}_z}\,\tilde{x}\tilde{y}, \\
\frac{u_y}{L} &= -e\frac{\nu F_x}{EL^2|\tilde{\mathcal{S}}|}\,\tilde{y} + \frac{F_z}{EL^2\tilde{I}_y}\left[e^2\nu(1-\tilde{x})\tilde{y}\tilde{z} + e^2\frac{2(1+\nu)\tilde{y}_C\tilde{I}_y}{\tilde{J}}\,\tilde{x}\tilde{z}\right] \\
&\quad + \frac{F_y}{EL^2\tilde{I}_z}\left[e^4\frac{\tilde{x}^2}{6}(3-\tilde{x}) + e^2\frac{\nu}{2}(1-\tilde{x})(\tilde{y}^2-\tilde{z}^2) - e^2\frac{2(1+\nu)\tilde{z}_C\tilde{I}_z}{\tilde{J}}\,\tilde{x}\tilde{z}\right] \\
&\quad - e^3\frac{2(1+\nu)C_x}{EL^3\tilde{J}}\,\tilde{x}\tilde{z} - e^2\frac{\nu C_y}{EL^3\tilde{I}_y}\,\tilde{y}\tilde{z} + e^2\frac{C_z}{2EL^3\tilde{I}_z}\,(e^2\tilde{x}^2 + \nu\tilde{y}^2 - \nu\tilde{z}^2), \\
\frac{u_z}{L} &= -e\frac{\nu F_x}{EL^2|\tilde{\mathcal{S}}|}\,\tilde{z} + \frac{F_y}{EL^2\tilde{I}_z}\left[e^2\nu(1-\tilde{x})\tilde{y}\tilde{z} + e^2\frac{2(1+\nu)\tilde{z}_C\tilde{I}_z}{\tilde{J}}\,\tilde{x}\tilde{y}\right] \\
&\quad + \frac{F_z}{EL^2\tilde{I}_y}\left[e^4\frac{\tilde{x}^2}{6}(3-\tilde{x}) - e^2\frac{\nu}{2}(1-\tilde{x})(\tilde{y}^2-\tilde{z}^2) - e^2\frac{2(1+\nu)\tilde{y}_C\tilde{I}_y}{\tilde{J}}\,\tilde{x}\tilde{y}\right] \\
&\quad + e^3\frac{2(1+\nu)C_x}{EL^3\tilde{J}}\,\tilde{x}\tilde{y} - e^2\frac{C_y}{2EL^2\tilde{I}_y}\,(e^2\tilde{x}^2 - \nu\tilde{y}^2 + \nu\tilde{z}^2) + e^2\frac{\nu C_z}{EL^3\tilde{I}_z}\,\tilde{y}\tilde{z}.
\end{aligned}
$$

Analyse asymptotique de la solution de SAINT-VENANT

$$\underline{u}(x,y,z) = \left\{\left[\frac{x^2}{6}(3L-x)\frac{F_y}{EI_z} + \frac{x^2}{2}\frac{C_z}{EI_z}\right]\underline{e}_y + \left[\frac{x^2}{6}(3L-x)\frac{F_z}{EI_y} - \frac{x^2}{2}\frac{C_y}{EI_y}\right]\underline{e}_z\right\}$$

$$+ \left\{\frac{2(1+\nu)C_x}{EJ}\, x\,\underline{e}_x + \left[\frac{x}{2}(x-2L)\frac{F_z}{EI_y} + x\frac{C_y}{EI_y}\right]\underline{e}_y + \left[-\frac{x}{2}(x-2L)\frac{F_y}{EI_z} + x\frac{C_z}{EI_z}\right]\underline{e}_z\right\}$$

$$\wedge \left\{y\underline{e}_y + z\underline{e}_z\right\} + O(e^2).$$

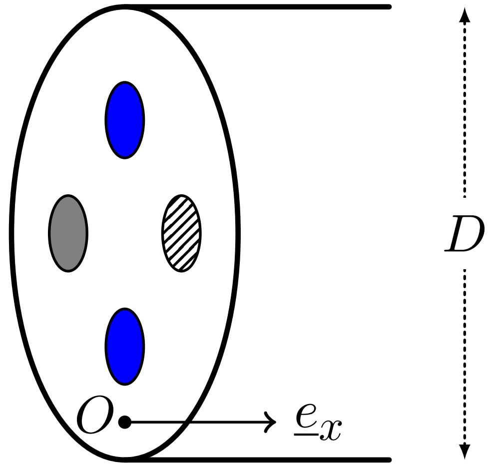
Conséquences.

1. $\underline{u}(x,y,z) = \underline{\overline{u}}(x) + \underline{\theta}(x) \wedge \{y\underline{e}_y + z\underline{e}_z\}$. C'est (asymptotiquement) une cinématique (linéarisée) de milieu de Cosserat curviligne.
2. $\underline{E} \simeq \underline{\overline{u}}' + \underline{e}_x \wedge \underline{\theta} \equiv 0$. La solution respecte (asymptotiquement) les liaisons internes de Navier-Bernoulli et d'inextensibilité.
3. C'est la solution du problème d'équilibre en théorie des poutres si et seulement si la loi de comportement adoptée est la loi standard inextensible (calcul de J ?).

$$\underline{\overline{u}}' + \underline{e}_x \wedge \underline{\theta} \equiv 0, \qquad \underline{M}(x) = \mu J\,\theta'_x\,\underline{e}_x + E\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\theta}'_{\perp},$$

Cela **justifie** le passage $3D \to 1D$, et **permet** le passage $1D \to 3D$.

Cas hétérogène et/ou anisotrope



Adimensionalisation, puis
recherche d'un développement asymptotique formel :

$$\frac{1}{L}\,\underline{u}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = e^{m}\,\underline{u}^{0}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) + e^{m-1}\,\underline{u}^{1}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) + e^{m-2}\,\underline{u}^{2}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) + \cdots\,,$$

Résultats.

1. $m = 4$.
2. La somme des termes en e^4 et e^3 s'écrit $\underline{u}(x,y,z) = \overline{\underline{u}}(x) + \underline{\theta}(x) \wedge \{y\underline{e}_y + z\underline{e}_z\}$. C'est (asymptotiquement) une cinématique (linéarisée) de milieu de Cosserat curviligne.
3. $\underline{E} \simeq \overline{\underline{u}}' + \underline{e}_x \wedge \underline{\theta} \equiv 0$. La solution respecte (asymptotiquement) les liaisons internes de Navier-Bernoulli et d'inextensibilité.
4. C'est la solution du problème d'équilibre en théorie des poutres si et seulement si la loi de comportement adoptée est :
$$\overline{\underline{u}}' + \underline{e}_x \wedge \underline{\theta} \equiv 0, \qquad \underline{M}(x) = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\theta}'(x),$$
où les 6 coefficients de la matrice symétrique $\underline{\underline{B}}$ s'identifie à partir de la solution d'un problème d'élasticité linéarisé 2D posé sur la section hétérogène.

Catalogue d'idées fausses

1. Procédure « simple » de calcul de la loi de comportement poutre.

$$\underline{u} = \overline{\underline{u}}(x) + \underline{\theta}(x) \wedge \{y\underline{e}_y + z\underline{e}_z\} \qquad \left[\underline{R}, \underline{M}\right] = \left[\int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_x \;,\; \int_{\mathcal{S}} (y\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z) \wedge \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_x\right]$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} + {}^{\mathsf{t}}\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}\right) \qquad \longrightarrow \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \lambda\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}$$

Ce n'est que l'équivalent de la borne de Voigt pour les poutres !

2. Dans les cas d'élancement modéré, il « serait souhaitable » de relâcher la liaison interne de Navier-Bernoulli. Le module d'élasticité associé à l'inclinaison de la section par rapport à la ligne moyenne est alors à calculer suivant 1. On trouverait que ce module est $\mu|\mathcal{S}|$.

L'analyse asymptotique qui précède montre que c'est une absurdité !

Cohérence des théories non-linéaires 3D et 1D ?

Fait n$^{\text{o}}$ 1. Un cylindre (3D) élastique homogène isotrope incompressible sollicité en compression simple a un mode de bifurcation en torsion si et seulement si il n'est pas de révolution.

$$\updownarrow$$

Une torsion infinitésimale d'amplitude arbitraire est autorisée par les équations d'équilibre 3D linéarisées autour de l'état précontraint (TIEP 3D) de compression simple.

Fait n$^{\text{o}}$ 2. En théorie des poutres, une tige rectiligne sollicitée en compression simple ne flambe pas en torsion (en flexion, oui, mais pas en torsion !)

$$\updownarrow$$

Les équations de poutres linéarisées autour de l'état précontraint (TIEP 1D) de compression simple, n'admettent pas de solutions de torsion (de flexion, oui, mais pas de torsion !)

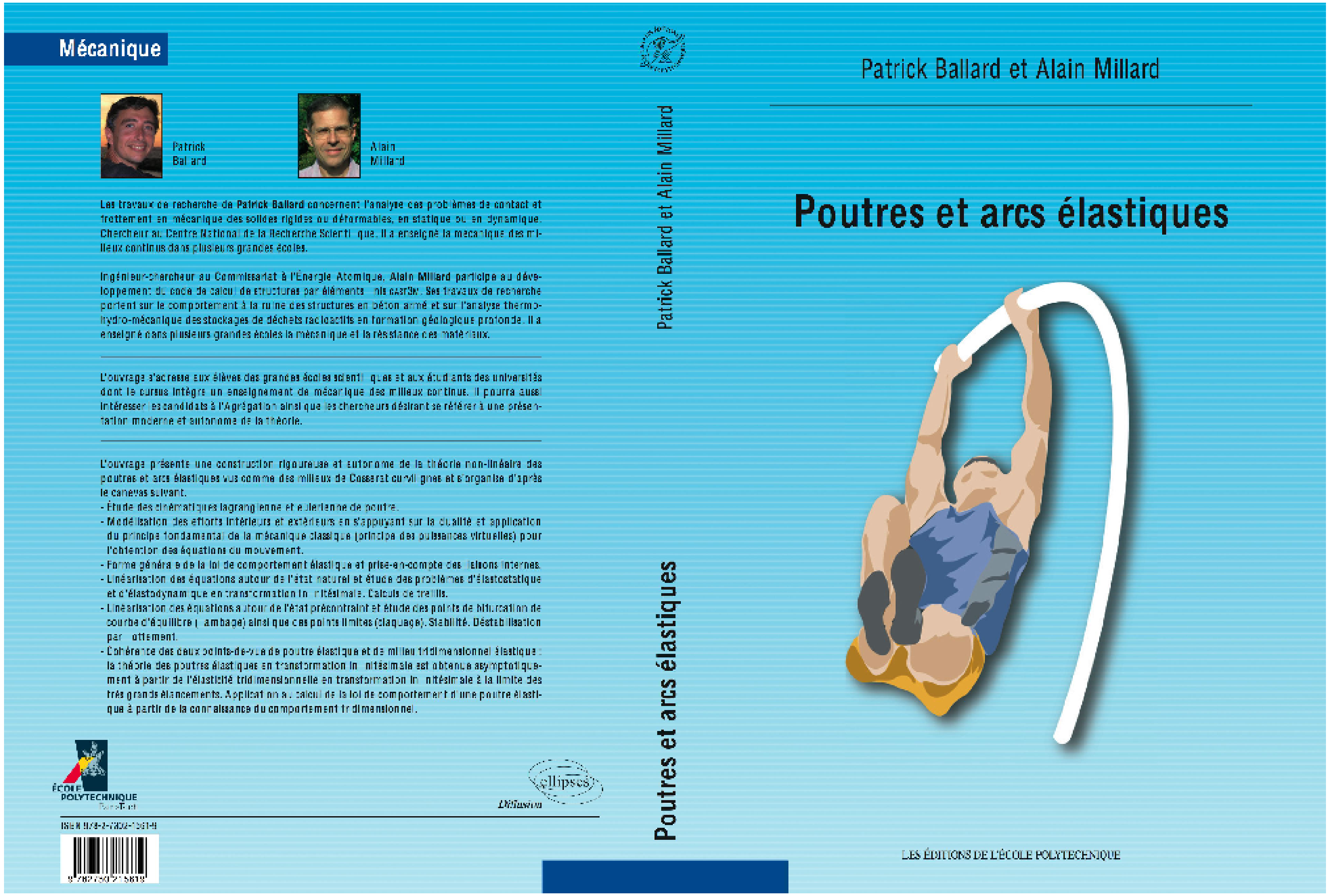
Morale de l'histoire

L'analyse asymptotique de TIEP 3D ne donne pas TIEP 1D.

ou

Le passage 3D $\rightarrow$ 1D efface certaines bifurcations.

Référence



http://catalogue.polytechnique.fr/site.php?id=129