

Homogénéisation des matériaux à structure
périodique
Ecole d'été
« Méthodes asymptotiques en mécanique »
Quiberon septembre 2012

D. CAILLERIE
Grenoble INP - UJF - CNRS
Laboratoire 3SR
Domaine Universitaire BP 53 X
38041 GRENOBLE Cedex, FRANCE
Denis.Caillerie@grenoble-inp.fr

Table des matières

I	Modèles linéaires	4
1	Introduction	4
2	Etude explicite d'un cas monodimensionnel	4
2.1	Présentation du problème	5
2.2	Solution analytique	6
2.2.1	Exemples numériques :	7
2.3	Méthode heuristique	10
2.4	Développements en double échelle	12
2.5	Convergence	18
3	Etude d'un problème de conduction thermique stationnaire	19
3.1	Description du milieu et du problème	19
3.1.1	Conduction stationnaire de la chaleur	19
3.1.2	Description du milieu périodique	20
3.2	Méthode heuristique	21
3.3	Développement asymptotique	21
3.3.1	Développement en double échelle des champs de température, de flux de chaleur et de leurs dérivées	21
3.3.2	Développement des équations	22
3.3.3	Equation de conservation macroscopique	23
3.3.4	Loi de Fourier macroscopique	23
3.4	Formulations variationnelles	28
3.4.1	Formulation variationnelle pour $\theta^{(1)}$	28
3.4.2	Formulations variationnelles pour le fonction vectorielle $\vec{\chi}$	28
3.4.3	Formulations variationnelles pour la fonction vectorielle $\vec{\tilde{\chi}}$	29
3.4.4	Formulations variationnelles pour les fonctions χ_k	30
3.5	Propriétés des coefficients homogénéisés	31
3.5.1	Calculs par éléments finis	31
4	Homogénéisation d'un composite élastique	32
4.1	Milieu élastique périodique	32
4.2	Développements asymptotiques	33
4.2.1	Développement en double échelle des champs de déplacement, de contraintes et de leurs dérivées	33

4.2.2	Equation d'équilibre macroscopique	34
4.2.3	Loi de comportement macroscopique	34
5	Milieux quasi périodiques	35
5.1	Milieux géométriquement quasi périodiques	36
5.1.1	Changement de variables	36
5.2	Homogénéisation de milieux géométriquement quasi périodiques	39
II	Modèles non linéaires	43
6	Homogénéisation d'un milieu élastique périodique en grandes transformations	44
6.1	Grandes transformations	44
A	Notations	49
B	Formulations faibles et lemme de Hill	53
B.1	Formulations faibles et lemme de Hill pour les champs de vecteurs	53
B.2	Formulations faibles et lemme de Hill pour les champs de tenseurs	56

Première partie

Modèles linéaires

1 Introduction

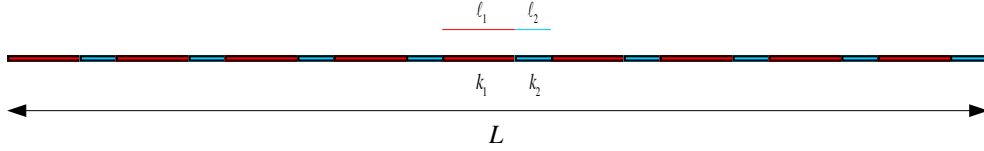
L'homogénéisation, aussi appelée *changement d'échelles* ou *passage micro-macro* ou *upscaling* . . . , désigne la procédure qui consiste à déterminer la modélisation homogène d'un milieu finement hétérogène. Le bénéfice est évident puisqu'il ne sera plus nécessaire de prendre en compte le détail des hétérogénéités dans les calculs analytiques ou numériques du milieu. Le mot clé dans la présentation qui précède est « finement » il suppose que le milieu présente au moins deux échelles. Une échelle fine où, si on regarde de près, on voit le détail des hétérogénéités : fibres dans un composite, porosités dans un milieu poreux, micro fractures dans un milieu endommagé, . . . et une échelle plus grossière où tous ces détails ne sont plus discernables. Dans ce cas, il est légitime de penser que si le milieu est sollicité au niveau de la grande échelle, la réponse, qui moyennera d'une façon ou d'une autre les détails de la petite échelle, sera aussi au niveau de cette échelle. Il existe plusieurs méthodes d'homogénéisation, ce cours sera consacré à une méthode qui tire partie de la séparation d'échelles en introduisant un petit paramètre ε qui est, en gros, le rapport de la taille des hétérogénéités sur celle du milieu. Cette méthode a été développée pour les milieux à hétérogénéités périodiquement distribuées, elle est basée sur des développements asymptotiques en puissances du petit paramètre, dits en double échelle. Il y a beaucoup de références sur la sujet, la méthodes ayant été appliquée à de nombreux domaines de la physiques et à de nombreuses situations ; les deux références classiques sont deux livres [2, 8] de la fin des années 70 et début 80. On trouve aussi de nombreux développements utiles dans [10, 11].

2 Etude explicite d'un cas monodimensionnel

L'étude d'un milieu monodimensionnel finement périodique est intéressante car il est possible de déterminer la solution exacte du problème et d'en étudier, au moins graphiquement, le comportement quand le nombre de périodes augmente. Cela permet également de proposer une méthode heuristique pour déterminer le modèle limite équivalent et d'introduire les développements asymptotiques.

2.1 Présentation du problème

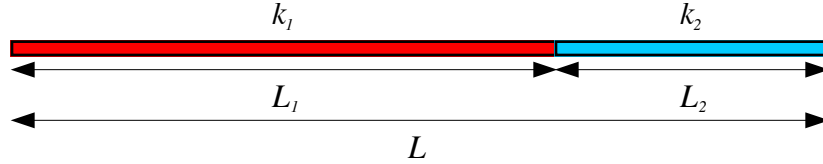
On considère une barre élastique périodique, c'est-à-dire constituée de la juxtaposition régulière de N_c motifs identiques constitués de deux matériaux homogènes de rigidités équivalentes k_1 et k_2 différentes et de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 . La longueur du motif est $\ell = \ell_1 + \ell_2$ et la longueur de la barre est $L = N_c \ell$.



La barre est donc hétérogène, sa rigidité équivalente est une fonction de x périodique où x est la variable repérant les points de la barre.

Une façon de décrire la périodicité de la raideur de la barre, particulièrement utile dans la mise en œuvre des développements asymptotiques, consiste à considérer la fonction $k(y)$, périodique sur la droite réelle \mathbb{R} , la période étant formée de deux parties de longueurs $L_1 = N_c \ell_1$ et $L_2 = N_c \ell_2$ où la fonction $k(y)$ prend les valeurs respectives k_1 et k_2 . Ce qui revient à dilater le motif de base constituant la barre dans le rapport N_c et à reproduire par périodicité le motif dilaté. Plus précisément, la fonction $k(y)$, périodique sur \mathbb{R} , est définie par :

$$k(y) = \begin{cases} k_1 & 0 < y < L_1 \\ k_2 & L_1 < y < L \end{cases} \quad (1)$$



La cellule dilatée

On vérifie facilement que la raideur de la barre au point x vaut $k(N_c x)$ en effet, cette fonction est périodique de période $\frac{L}{N_c}$, c'est-à-dire ℓ , et prend alternativement les valeurs k_1 et k_2 sur des parties de longueurs $\frac{L_1}{N_c}$ et $\frac{L_2}{N_c}$, c'est-à-dire ℓ_1 et ℓ_2 .

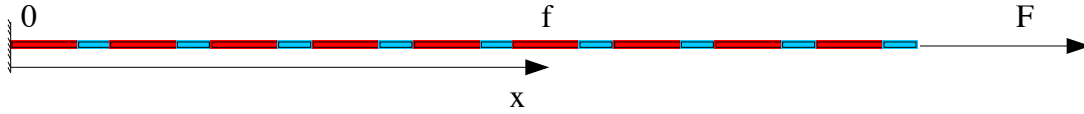
Dans la suite on considère plusieurs barres de même longueur L constituées d'un nombre N_c de motifs de base variable mais grand. N_c étant supposé grand, on introduit le petit paramètre :

$$\epsilon = \frac{1}{N_c} \quad (2)$$

On a donc $\ell = \epsilon L$, $\ell_1 = \epsilon L_1$ et $\ell_2 = \epsilon L_2$ et la raideur de la barre au point x vaut $k\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$.

Remarque 1. On peut voir facilement que la description précédente de la raideur de la barre s'applique aussi au cas où cette raideur, toutefois périodique, n'est pas constante par morceaux. Il suffit de changer la définition (1) de la fonction $k(y)$ périodique sur \mathbb{R} de période $[0, L]$.

Les propriétés mécaniques de la barre étant précisées, on considère pour fixer les idées le cas où la barre, fixée en $x = 0$, est soumise à une densité f de force longitudinale et à une force F au point $x = L$.



Chargement de la barre

L'effort normal dans la barre et le déplacement des points de la barre, respectivement notés N et u vérifient les équations suivantes :

Equation d'équilibre :

$$\frac{dN}{dx} + f = 0 \quad (3)$$

Loi de comportement :

$$N = k\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{du}{dx} \quad (4)$$

Conditions aux limites :

$$u(0) = 0 \text{ et } N(L) = F \quad (5)$$

2.2 Solution analytique

Le problème (3), (4), (5) étant monodimensionnel, il est facile d'en déterminer la solution exacte, afin d'étudier la dépendance de cette solution vis à vis du nombre de motifs dans la barre.

On intègre l'équation d'équilibre (3) en tenant compte des conditions aux limites (5), ce qui donne :

$$N(x) = \int_x^L f(\xi) d\xi + F \quad (6)$$

le report de cette expression dans la loi de comportement (4) donne :

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{k\left(\frac{x}{\epsilon}\right)} \left(\int_x^L f(\xi) d\xi + F \right)$$

Dans un cas général, cette équation s'intègre par une autre primitive ; dans le cas considéré où la raideur est constante par morceaux, on a sur un segment $[a, b]$ où la raideur vaut k_i :

$$u(x) = u(a) + \frac{1}{k_i} (P_N(x) - P_N(a))$$

où $P_N(x)$ est une primitive de N sur le segment $[a, b]$. Sur le segment $[0, \ell_1]$, on a $u(\ell_1) = \frac{1}{k_1} (P_N(\ell_1) - P_N(0))$ ce qui permet de déterminer u sur le segment $[\ell_1, \ell_2]$ et on poursuit de proche en proche.

2.2.1 Exemples numériques :

On considère différentes situations correspondant aux données géométriques et mécaniques suivantes :

$$L = 2; L_1 = 1,4; L_2 = 0,6; k_1 = 1,5; k_2 = 0,562$$

On étudie en premier lieu le cas du chargement $f = 0, F = 2$.

Dans ce cas $N = F$ d'où $\frac{du}{dx} = \frac{N}{k(\frac{x}{\epsilon})}$ ce qui, compte tenu de la condition $u(0) = 0$, donne, une fois intégré sur la barre entière $[O, L]$:

$$u(L) = \left(\int_0^L \frac{1}{k(\frac{x}{\epsilon})} dx \right) N$$

soit, comme $k(\frac{x}{\epsilon})$ vaut k_1 sur N_c morceaux de longueurs ℓ_1 et k_2 sur N_c morceaux de longueurs ℓ_2 :

$$u(L) = N_c \left(\frac{\ell_1}{k_1} + \frac{\ell_2}{k_2} \right) N$$

c'est-à-dire :

$$u(L) = \left(\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} \right) N$$

On en déduit la relation force appliquée/déformation globale :

$$F = k^G \frac{u(L)}{L}$$

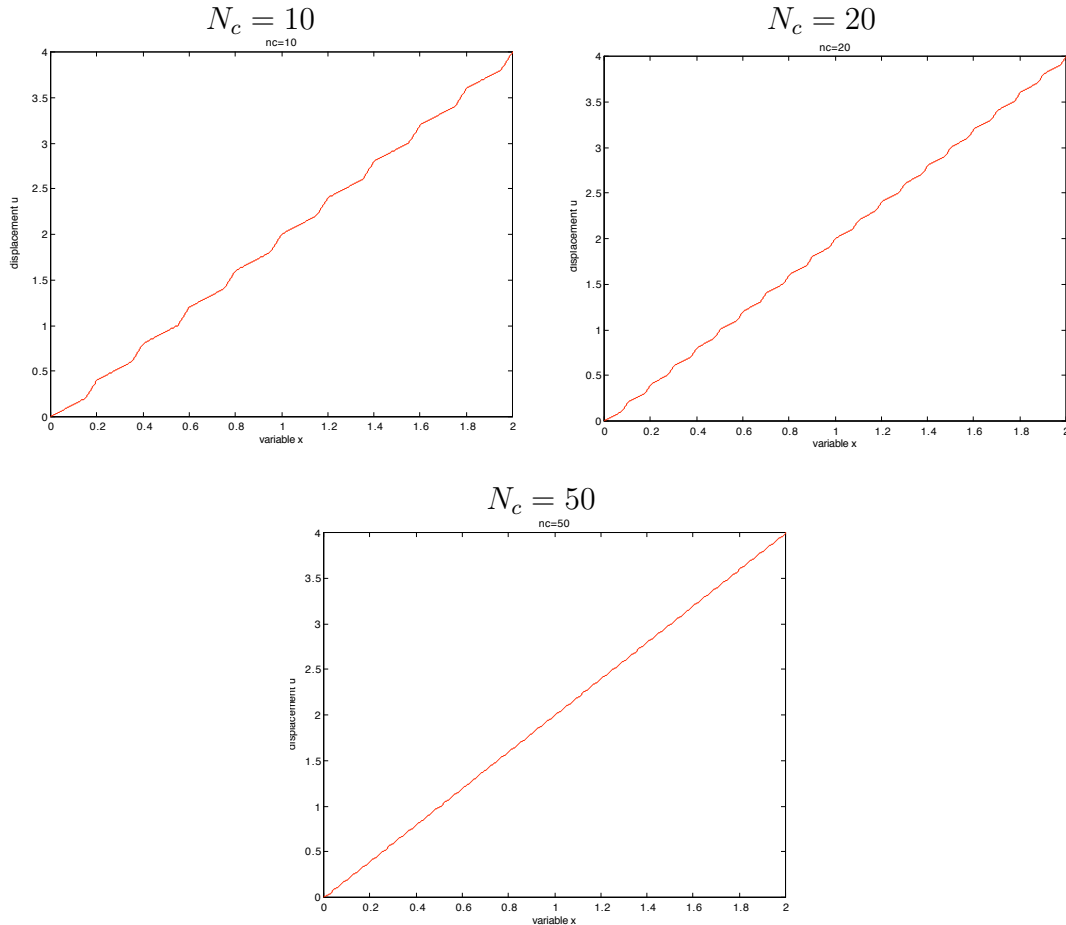
où la raideur globale k^G de la barre est donnée :

$$\frac{1}{k^G} = \frac{1}{L} \left(\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} \right) \quad (7)$$

dans cet exemple numérique, k^G est égale à 1.

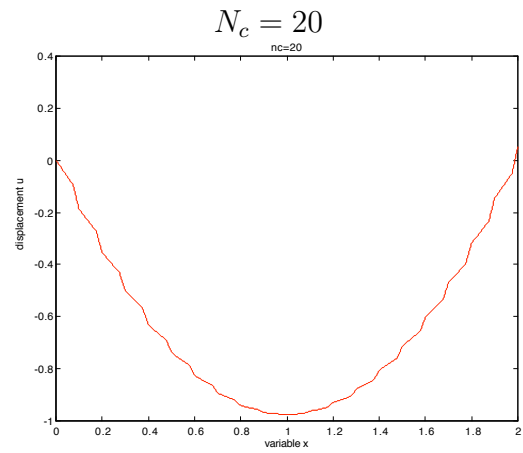
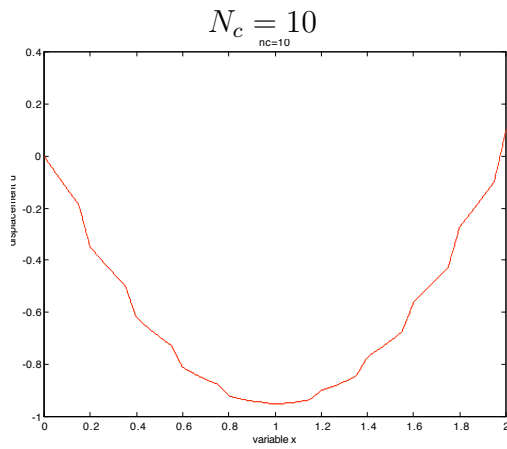
On peut remarquer que cette raideur globale est indépendante du nombre de motifs dans la barre.

On considère maintenant les graphiques de la fonction $x \rightarrow u(x)$ pour $N_c = 10, 20$ et 50 :

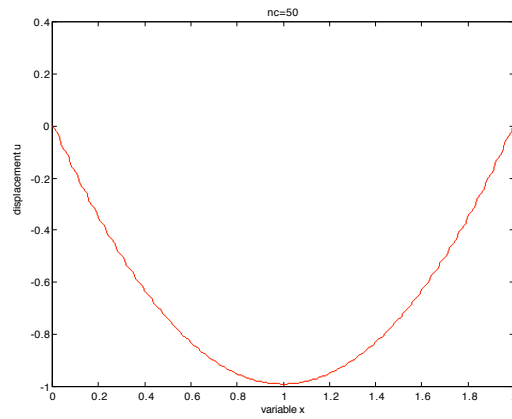


On constate que le graphe du déplacement $u(x)$ se rapproche d'une droite de pente 2 quand N_c croît et qu'il est très proche de cette droite pour $N_c = 50$. La droite en question est le graphe du déplacement d'une barre homogène dont de raideur égale à la raideur globale k^G (donnée par (7) et égale à 1) et soumise au chargement $f = 0, F = 2$. On pourrait penser que la convergence constatée du déplacement vers celui d'une barre homogène de raideur k^G est liée au fait que la densité de force répartie f est nulle. En fait il n'en est rien comme le prouve l'étude de des deux autres chargements suivants.

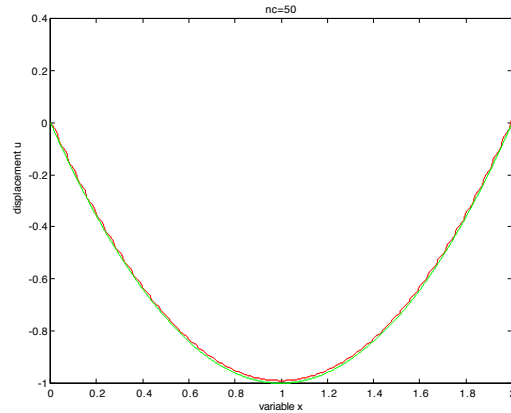
On considère le chargement $f = -2, F = 0$ pour $N_c = 10, 20$ et 50 :



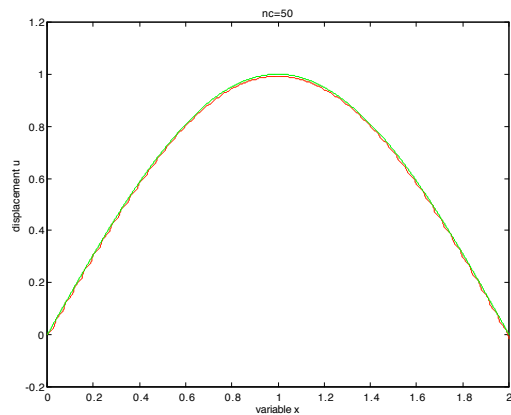
$N_c = 50$



On constate là encore que pour $N_c = 50$ le champ de déplacement est proche de celui, parabolique, d'une barre homogène soumise au même chargement $f = -2$, $F = 0$ en effet, en traçant sur un même graphique les déplacements de la barre hétérogène pour $N_c = 50$ et de la barre homogène de raideur globale du cas k^G donnée par (7), on obtient :



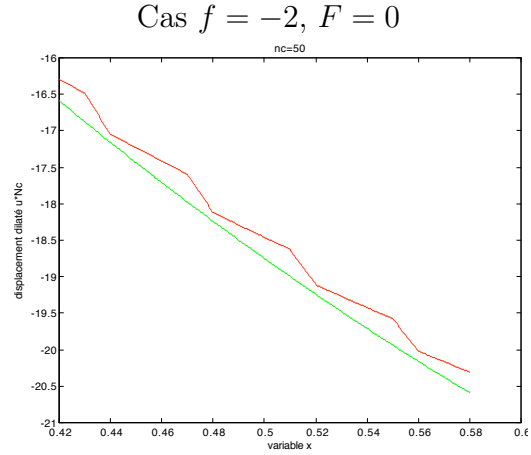
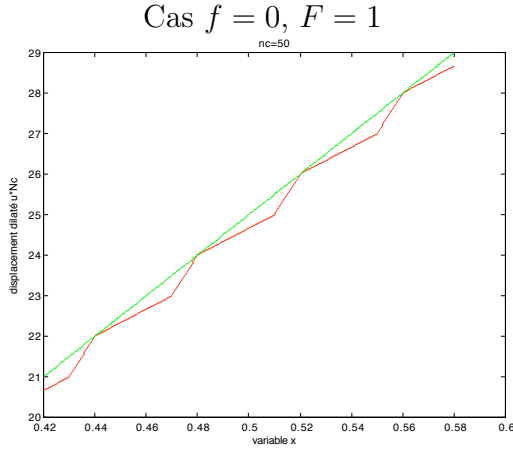
De même, pour un barre de 50 motifs soumise aux efforts $f = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$, $F = -\frac{\pi}{L}$, on obtient le graphique comparatif avec le déplacement de la barre homogène de raideur k^G soumise au même chargement :



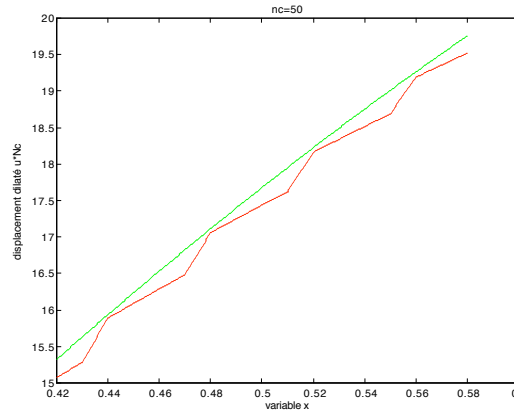
Dans les trois cas de forces considérés, on constate « expérimentalement » que pour N_c assez grand, le champ de déplacement est pratiquement celui d'une barre homogène de raideur k^G .

2.3 Méthode heuristique

Il est possible de justifier le résultat vérifié « expérimentalement » au paragraphe précédent en utilisant la méthode « heuristique » introduite par E. Sanchez [9] et développée par P. Suquet [12]. Pour introduire cette méthode, on grossit les graphes dans le rapport N_c autour du point $x = 0,5$.



Cas $f = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right), F = -\frac{\pi}{L}$



Dans les trois cas de chargement, on constate que la variation du déplacement u exact (en rouge) sur une période $(x, x + \ell)$ est pratiquement celle du déplacement limite U (en vert), c'est-à-dire que :

$$u(x + \ell) - u(x) \simeq \ell \frac{dU}{dx} \quad (8)$$

D'autre part, on peut considérer que pour ℓ petit, la variation de l'effort normal sur une période $(x, x + \ell)$ est négligeable et, par conséquent, que sur cette période l'effort normal N est à peu près constant, l'intégration de la loi de comportement (4) inversée, c'est-à-dire $\frac{du}{d\xi} = \frac{N}{k\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right)}$ sur une période $(x, x + \ell)$ donne par conséquent :

$$u(x + \ell) - u(x) = N \int_x^{x+\ell} \frac{1}{k\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right)} d\xi$$

ce qui, compte tenu de la condition approchée (8), entraîne :

$$N \int_x^{x+\ell} \frac{1}{k\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right)} d\xi = \ell \frac{dU}{dx}$$

ce qui est la loi de comportement macroscopique :

$$N = k^H \frac{dU}{dx} \quad (9)$$

où la raideur homogénéisée k^H est donnée par :

$$\frac{1}{k^H} = \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \frac{1}{k\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right)} d\xi \quad (10)$$

on peut noter qu'en raison de la périodicité de la fonction $k(y)$ la raideur homogénéisée k^H est indépendante du choix de x . En utilisant le changement de variables $\xi = \epsilon y$, la périodicité de k et la relation $\ell = \epsilon L$, on montre que :

$$\frac{1}{k^H} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{k(y)} dy$$

Dans le cas considéré où la raideur $k(y)$ est constante par morceaux, on vérifie facilement que :

$$\frac{L}{k^H} = \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} \quad (11)$$

La raideur k^H est bien égale à la raideur globale k^G , donnée par (7), du problème pour $f = 0$ qui a servi à « intuiter », par analogie avec le cas $f = 0$, les solutions limites construites au paragraphe (2.2.1) pour les deux autres chargements $f = -2$, $F = 0$ et $f = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, $F = -\frac{\pi}{L}$.

2.4 Développements en double échelle

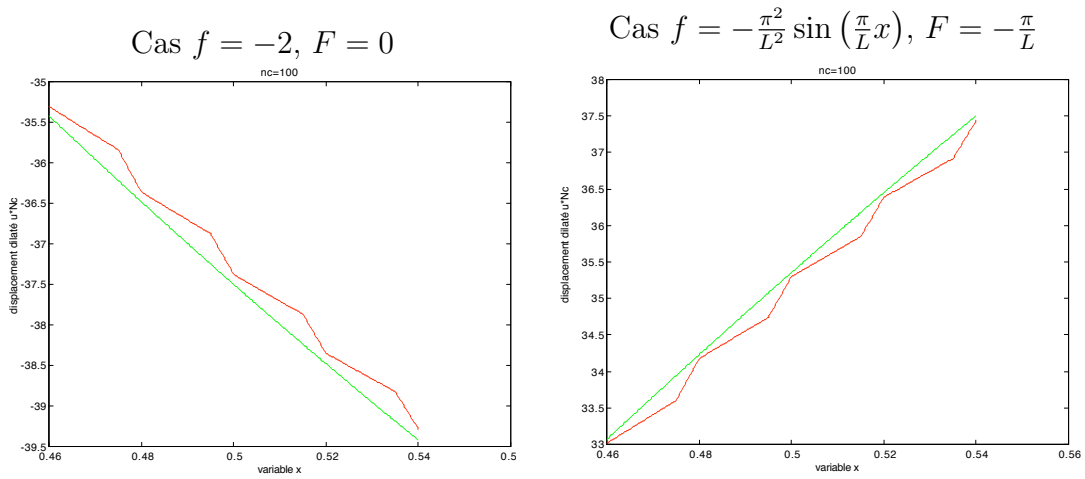
On a vu au paragraphe précédent que pour un nombre de périodes N_c grand, le déplacement de la barre hétérogène sous un chargement donné est proche de celui d'une barre homogène sous le même chargement. L'approximation du déplacement de la barre hétérogène par celui de la barre homogène est d'autant meilleure que ϵ est petit. On peut donc considérer que le déplacement U de la barre homogène est la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$ du déplacement de la barre hétérogène et « homogénéiser » revient à faire tendre ϵ vers 0. L'intérêt de cette homogénéisation est évident dans le cas monodimensionnel

considéré car il est clair que la détermination du déplacement de la barre homogène est plus simple que celui de la barre hétérogène, cela reste vrai pour un problème bidimensionnel où le calcul numérique de la solution du problème limite homogénéisé est plus simple que celle du problème finement hétérogène.

Remarque 2. Il faut souligner que l'homogénéisation qui consiste à faire tendre ϵ vers 0 revient à considérer une suite de structures à hétérogénéités de plus en plus fines or, dans la pratique, le résultat obtenu va être appliqué à une structure ayant un nombre fini N_c de périodes. Comme dans la plupart des processus asymptotiques, la construction de la suite de structures est une « expérience de pensée », il n'y a qu'une structure réelle comportant un nombre fini de périodes et la question de l'applicabilité du résultat se pose. Cette question n'est, en général, pas cruciale dans le cas d'une homogénéisation simple mais dans un certain nombre de problèmes, structure mince finement périodique, écoulement d'un fluide visqueux dans un milieu poreux, . . . plusieurs petits paramètres peuvent apparaître et le problème limite peut dépendre plus ou moins fortement des ordres de grandeur respectifs de ces paramètres. La question se pose alors de déterminer le problème limite le mieux adapté au problème considéré.

L'étude de la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$ du déplacement de la barre hétérogène, revient donc à considérer une suite de barres de même longueur soumise au même chargement. Les déplacements ainsi que les tensions dans ces barres dépendent du paramètre ϵ et sont notés u^ϵ et N^ϵ . La détermination des limites pour $\epsilon \rightarrow 0$ de ces quantités est une étude asymptotique qui peut se faire soit en prouvant une convergence, cette démarche est évoquée au paragraphe (2.5), soit en construisant un développement asymptotique de u^ϵ et N^ϵ vis à vis de ϵ , ce qui est l'objet de ce paragraphe, le développement considéré est selon les puissances de ϵ , il est appelé développement en double échelle.

En considérant les trois zooms du paragraphe (2.3) et en comparant les deux derniers aux zooms suivants correspondant à $N_c = 100$:



on peut voir que l'écart entre la solution exacte u et la solution limite U est une perturbation qui est d'ordre $\frac{1}{N_c} = \epsilon$ et que cette perturbation est, au moins localement, périodique de période ℓ . Ce qu'on peut écrire localement :

$$u(x) \simeq U(x) + \epsilon v(x)$$

où v est une fonction localement périodique de période ℓ .

Cette approximation est un début de développement qu'on généralise et systématisé sous la forme :

$$u^\epsilon(x) = u^{(0)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon u^{(1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 u^{(2)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots \quad (12)$$

où les fonctions $u^{(n)}(x, y)$ sont y -périodiques de période Y . Ce développement est appelé développement en double échelle parce qu'il fait apparaître deux échelles de variation de u^ϵ en effet une variation de x de l'ordre de ϵ entraîne des variations d'ordre ϵ des $u^{(n)}(x, y)$ relativement à la première variable mais d'ordre 1 relativement à la seconde variable. x est appelée variable de grande échelle et y variable de petite échelle.

Remarque 3. Soient \tilde{x} et $\tilde{x} + \epsilon L$ deux points de la barre élastique homologues par périodicité, d'après le développement (12), on a :

$$u^\epsilon(\tilde{x}) = u^{(0)}(\tilde{x}) + \epsilon u^{(1)}\left(\tilde{x}, \frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2(\dots)$$

$$u^\epsilon(\tilde{x} + \epsilon L) = u^{(0)}(\tilde{x} + \epsilon L) + \epsilon u^{(1)}\left(\tilde{x} + \epsilon L, \frac{\tilde{x}}{\epsilon} + L\right) + \epsilon^2(\dots)$$

Soit, compte-tenu de la périodicité des fonctions $u^{(n)}$ et en utilisant des développements de Taylor :

$$u^\epsilon(\tilde{x} + \epsilon L) = u^{(0)}(\tilde{x}) + \epsilon \left(u^{(1)}\left(\tilde{x}, \frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) + \frac{du^{(0)}}{dx}(\tilde{x}) L \right) + \epsilon^2(\dots)$$

et par différence :

$$u^\epsilon(\tilde{x} + \epsilon L) - u^{(0)}(\tilde{x}) = \epsilon \frac{du^{(0)}}{dx}(\tilde{x}) L + \epsilon^2(\dots)$$

On retrouve, à l'ordre ϵ^2 près l'égalité :

$$u^\epsilon(\tilde{x} + \epsilon L) - u^{(0)}(\tilde{x}) = \epsilon \frac{du^{(0)}}{dx}(\tilde{x}) L$$

qui a servi dans la méthode heuristique.

Revenons aux développements asymptotiques. Par dérivation de (12), il vient :

$$\frac{du^\epsilon}{dx}(x) = \frac{1}{\epsilon} \frac{du^{(0)}}{dy}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{du^{(0)}}{dx}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{du^{(1)}}{dy}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon \left(\frac{du^{(1)}}{dx}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{du^{(2)}}{dy}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \right) + \dots$$

ce qui, reporté dans la loi de comportement (4), montre que l'effort normal N^ϵ se développe en :

$$N^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} N^{(-1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + N^{(0)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon N^{(1)}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 N\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

où les $N^{(n)}(x, y)$ sont y -périodiques de période Y et vérifient par identification des termes de même puissance de ϵ :

$$N^{(-1)} = k(y) \frac{du^{(0)}}{dy} \tag{13a}$$

$$N^{(0)} = k(y) \left(\frac{du^{(0)}}{dx} + \frac{du^{(1)}}{dy} \right) \tag{13b}$$

$$N^{(1)} = k(y) \left(\frac{du^{(1)}}{dx} + \frac{du^{(2)}}{dy} \right) \tag{13c}$$

.....

Par dérivation, on obtient en omettant les variables :

$$\frac{dN^\epsilon}{dx} = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{dN^{(-1)}}{dy} + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{dN^{(-1)}}{dx} + \frac{dN^{(0)}}{dy} \right) + \frac{dN^{(0)}}{dx} + \frac{dN^{(1)}}{dy} + \epsilon \left(\frac{dN^{(1)}}{dx} + \frac{dN^{(2)}}{dy} \right) + \dots$$

Le report de ce développement dans l'équation d'équilibre (3) donne après identification des termes de mêmes puissances de ϵ :

$$\frac{dN^{(-1)}}{dy} = 0 \quad (14a)$$

$$\frac{dN^{(-1)}}{dx} + \frac{dN^{(0)}}{dy} = 0 \quad (14b)$$

$$\frac{dN^{(0)}}{dx} + \frac{dN^{(1)}}{dy} + f = 0 \quad (14c)$$

.....

De l'équation (14a) on déduit que $N^{(-1)}$ ne dépend pas de y (ce qui est évidemment compatible avec la périodicité en y). L'équation (13a) s'intègre alors en :

$$u^{(0)}(x, y) = N^{(-1)}(x) \int_0^y \frac{1}{k(\zeta)} d\zeta + \bar{u}^{(0)}(x)$$

où $\bar{u}^{(0)}$ est une constante d'intégration pour l'équation différentielle en y (14a), c'est-à-dire une fonction de la variable de grande échelle x seule.

La condition de périodicité $u^{(0)}(x, L) = u^{(0)}(x, 0)$ est équivalente à :

$$N^{(-1)} \int_0^L \frac{1}{k(\zeta)} d\zeta = 0$$

ce qui, comme k est strictement positif, entraîne :

$$N^{(-1)} = 0$$

et

$$u^{(0)}(x, y) = \bar{u}^{(0)}(x)$$

c'est-à-dire que $u^{(0)}$ ne dépend que de la variable de grande échelle x .

Remarque 4. Le terme dominant $u^{(0)}$ du développement (12) est le déplacement du milieu macroscopique équivalent, il ne dépend que de la variable de grande échelle x ce qui correspond bien avec l'idée d'homogénéisation qui gomme les variations à petite échelle du déplacement.

Pour obtenir les équations « macroscopiques » satisfaites par $u^{(0)}$, il faut poursuivre l'exploitation des équations (14) et (13).

Compte tenu de la nullité de $N^{(-1)}$, l'équation (14b) entraîne que $N^{(0)}$ ne dépend pas de y . L'intégration sur $[0, L]$ de (13b) réécrite :

$$\frac{du^{(0)}}{dx} + \frac{du^{(1)}}{dy} = \frac{1}{k(y)} N^{(0)}$$

donne alors, en tenant compte de la périodicité de $u^{(1)}$ et de l'indépendance de $u^{(0)}$ vis à vis de y :

$$L \frac{du^{(0)}}{dx} = N^{(0)} \int_0^L \frac{1}{k(\zeta)} d\zeta$$

Ce qu'on peut écrire :

$$N^{(0)} = k^H \frac{du^{(0)}}{dx} \quad (15)$$

avec, dans le cas considéré où k est constante par morceaux :

$$\frac{L}{k^H} = \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}$$

Cette loi de comportement macroscopique est exactement la loi (9) trouvée par la méthode heuristique.

Pour déterminer l'équation d'équilibre vérifiée par $N^{(0)}$, on intègre l'équation (14c) sur $[0, L]$, ce qui donne, compte tenu de la périodicité de $N^{(1)}$:

$$\frac{dN^{(0)}}{dx} + \langle f \rangle = 0 \quad (16)$$

où la moyenne $\langle f \rangle$ de f est définie par :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L f(y) dy \quad (17)$$

La méthode asymptotique a ainsi permis de déterminer le modèle macroscopique équivalent de la barre finement hétérogène constitué de la loi de comportement homogénéisée (15) et de l'équation d'équilibre macroscopique (16).

Exercice 5. Poursuivre le développement, c'est-à-dire déterminer $u^{(1)}$ et les termes suivants.

Appliquer la méthode des développements asymptotiques à une poutre droite dont les équations d'équilibre et la relation moment fléchissant M - rotation de la section

droite θ sont :

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dx} + p &= 0 \\ \frac{dM}{dx} - T &= 0 \\ M &= EI \frac{d\theta}{dx}\end{aligned}$$

avec, soit la condition de Navier Bernouilli

$$\theta + \frac{dw}{dx} = 0$$

soit la loi de comportement de Timoshenko portant sur l'effort tranchant T :

$$T = GA_e \left(\theta + \frac{dw}{dx} \right)$$

où E et G sont le module d'Young et le module de cisaillement du matériau, I et A_e sont l'inertie et une aire « équivalente » de la section droite de la poutre.

Autre possibilité :

Introduire un point de repère x^c dans chaque cellule homologue d'un point origine dans la cellule de référence et développer sous la forme :

$$u^\epsilon(x) = u^{(0)}(x^c) + \epsilon u^{(1)}\left(x^c, \frac{x - x^c}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 u^{(2)}\left(x^c, \frac{x - x^c}{\epsilon}\right) + \dots$$

où $\frac{x - x^c}{\epsilon} \in Y$, ce qui détermine la cellule c et x^c .

Inconvénient de la méthode, $u^{(n)}(x^c, y)$ est discontinue par rapport à y .

2.5 Convergence

Les résultats des développements asymptotiques en double échelle du paragraphe 2.4 restent formels le temps qu'une convergence n'a pas été prouvée. Plusieurs méthodes de convergence ont été appliquées à l'homogénéisations des milieux périodiques, *G-convergence* [4], *Γ -convergence*, *H-convergence* [6], *méthode dite « de Tartar »* [2, 8], *convergence à deux échelles* [7, 1], *méthode par éclatement* [3].

3 Etude d'un problème de conduction thermique stationnaire

On généralise dans cette partie les méthodes d'homogénéisation (heuristique et développement asymptotique) à un problème bidimensionnel. Le domaine choisi est celui de la conduction thermique stationnaire qui est formellement plus simple que l'élastostatique puisque l'inconnue primale, le champ de température, est scalaire alors qu'en élastostatique le champ de déplacement est vectoriel mais l'extension à l'élastoplastique ne pose aucun problème.

3.1 Description du milieu et du problème

3.1.1 Conduction stationnaire de la chaleur

\vec{q} et θ désignant respectivement les champs de flux de chaleur et de température et f une densité surfacique (volumique pour un cas tridimensionnel) d'apport de chaleur, les équations régissant la conduction stationnaire de la chaleur dans un domaine bidimensionnel Ω sont :

$$\operatorname{div} \vec{q} + f = 0 \text{ dans } \Omega \quad (18a)$$

$$\vec{q} = -K \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta \text{ dans } \Omega \quad (18b)$$

+ conditions aux limites non précisées

où l'application linéaire K est le tenseur de conductivité thermique, K est symétrique.

L'équation (18a) traduit la conservation de la chaleur dans le cas stationnaire (pas de variation temporelle de la température), l'équation (18b) qui relie le flux de chaleur \vec{q} au gradient $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta$ de température est appelée loi de Fourier de la conduction de la chaleur. Le milieu est dit isotrope si le tenseur K est simplement un multiple de l'identité \mathbb{I} , c'est-à-dire $K = k\mathbb{I}$, dans ce cas la loi de Fourier (18b) s'écrit :

$$\vec{q} = -k \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta$$

En notation indicielle les équations (18) s'écrivent :

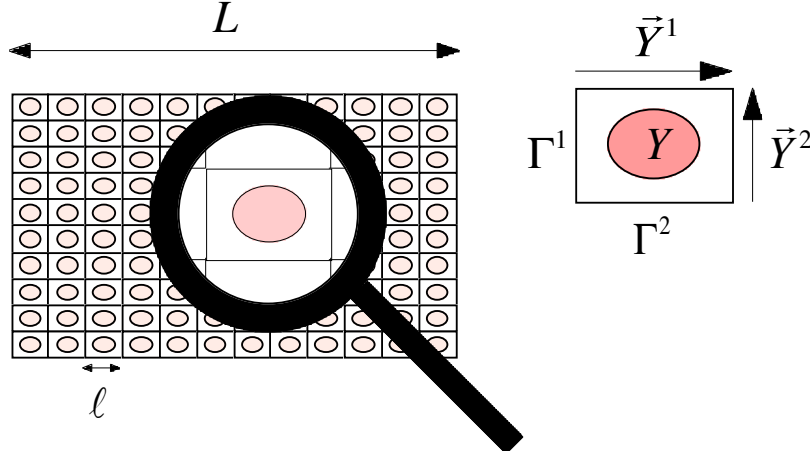
$$\partial_i^x q_i + f = 0 \text{ dans } \Omega \quad (19a)$$

$$q_i = -K_{ij} \partial_j^x \theta \text{ dans } \Omega \quad (19b)$$

où ∂_i^x désigne la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_i}$ et où la convention de sommation d'Einstein est utilisée. Dans la suite de ce cours, c^i est la première notation, dite vectorielle, qui est la plus utilisée.

3.1.2 Description du milieu périodique

Dans le cadre de l'homogénéisation, le milieu qu'on considère est périodiquement et finement hétérogène, c'est-à-dire que le tenseur des conductions thermique K dépend périodiquement de la variable d'espace \vec{x} et que la taille ℓ d'une période est petite devant une dimension caractéristique L du domaine Ω .



Le milieu périodique et la cellule de référence Y définie par les deux vecteurs \vec{Y}_1 et \vec{Y}_2 .

En procédant comme au paragraphe 2.1 pour le milieu monodimensionnel, on définit la dépendance spatiale du tenseur de conductivité thermique en considérant une fonction $K(\vec{y})$ définie sur la cellule Y et prolongée à tout le plan par périodicité et en posant :

$$K^\epsilon(\vec{x}) = K\left(\frac{\vec{x}}{\epsilon}\right)$$

où ϵ est le petit paramètre égal à ℓ/L pour le milieu considéré et destiné à tendre vers 0 dans le processus d'homogénéisation.

Les équations considérées pour l'étude de l'homogénéisation sont :

$$\operatorname{div} \vec{q}^\epsilon + f = 0 \text{ dans } \Omega \quad (20a)$$

$$\vec{q}^\epsilon = -K^\epsilon(\vec{x}) \otimes \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta^\epsilon \text{ dans } \Omega \quad (20b)$$

+ conditions aux limites non précisées

où :

$$K^\epsilon(\vec{x}) = K\left(\frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) \quad (21)$$

$K(\vec{y})$ étant défini sur la cellule Y .

3.2 Méthode heuristique

Exercice 6. Généraliser et appliquer au problème de thermique bidimensionnel la méthode heuristique présentée au paragraphe 2.3.

3.3 Développement asymptotique

3.3.1 Développement en double échelle des champs de température, de flux de chaleur et de leurs dérivées

On reprend l'idée du développement en double échelle du paragraphe 2.4 appliquée ici au champ de température qu'on cherche sous la forme :

$$\theta^\epsilon(\vec{x}) = \theta^{(0)}(\vec{x}) + \epsilon\theta^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2\theta^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots \quad (22)$$

où les $\theta^{(n)}(\vec{x}, \vec{y})$ sont y -périodiques de période Y . Ce qui signifie en particulier que :

$$\forall \vec{y} \in \Gamma^i, \theta^{(n)}(\vec{x}, \vec{y}) = \theta^{(n)}(\vec{x}, \vec{y} + \vec{Y}^i), \quad i = 1, 2$$

où Γ^1 et Γ^2 désignent respectivement les bords gauche et droit de la cellule Y conformément à la figure du paragraphe 3.1.2. On écrit aussi la relation précédente :

$$[[\theta^{(n)}]]^i = 0, \quad i = 1, 2$$

où $[[\eta]]^1$ et $[[\eta]]^2$ sont les fonctions définies par :

$$\forall \vec{y} \in \Gamma^i, [[\eta]]^i = \eta(\vec{y} + \vec{Y}^i) - \eta(\vec{y}) \quad (23)$$

Remarque 7. Dans les termes $\theta^{(n)}(\vec{x}, \vec{y})$ du développement (22), la variable de **grande échelle** \vec{x} est quelquefois appelée **variable lente** et la variable de **petite échelle** \vec{y} **variable rapide**, cela en référence aux développements en double échelle par rapport au temps.

Le premier terme $\theta^{(0)}(\vec{x})$ du développement (22) a été choisi a priori indépendant de la variable de petite échelle \vec{y} , en fait cette hypothèse n'est pas indispensable, on peut le prendre comme les autres $\theta^{(n)}$ dépendant des deux variables, c'est-à-dire de la forme $\theta^{(0)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right)$ et montrer qu'il ne dépend que de la variable de grande échelle, c'est ce qui a été fait pour le développement (12) du cas monodimensionnel et c'est l'objet de l'exercice 12.

Par dérivation de (22), il vient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\theta^\epsilon(\vec{x}) = \overrightarrow{\text{grad}}^x\theta^{(0)}(\vec{x}) + \overrightarrow{\text{grad}}^y\theta^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon \left(\overrightarrow{\text{grad}}^x\theta^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \overrightarrow{\text{grad}}^y\theta^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) \right) + \dots$$

soit, en omettant les variables :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\theta^\epsilon = \overrightarrow{\text{grad}}^x\theta^{(0)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y\theta^{(1)} + \epsilon \left(\overrightarrow{\text{grad}}^x\theta^{(1)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y\theta^{(2)} \right) + \dots$$

d'où d'après la loi de Fourier (20b) :

$$\vec{q}^\epsilon(\vec{x}) = \vec{q}^{(0)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon \vec{q}^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 \vec{q}^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots$$

où les $\vec{q}^{(n)}(\vec{x}, \vec{y})$ sont y -périodiques de période Y . Ce qui entraîne :

$$\forall \vec{y} \in \Gamma_i, \vec{q}^{(n)}\left(\vec{x}, \vec{y} + \vec{Y}_i\right) \cdot \vec{n} = -\vec{q}^{(n)}(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \vec{n}, \quad i = 1, 2 \quad (24)$$

Par dérivation, on obtient en omettant les variables :

$$\text{div}\vec{q}^\epsilon(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon} \text{div}^y\vec{q}^{(0)} + \text{div}^x\vec{q}^{(0)} + \text{div}^y\vec{q}^{(1)} + \epsilon \left(\text{div}^x\vec{q}^{(1)} + \text{div}^y\vec{q}^{(2)} \right) + \dots$$

3.3.2 Développement des équations

Le développement de l'équation de conservation de la chaleur (20a) s'écrit :

$$\frac{1}{\epsilon} \text{div}^y\vec{q}^{(0)} + \text{div}^x\vec{q}^{(0)} + \text{div}^y\vec{q}^{(1)} + \epsilon \left(\text{div}^x\vec{q}^{(1)} + \text{div}^y\vec{q}^{(2)} \right) + \dots + f = 0$$

d'où en identifiant les termes de même puissance de ϵ :

$$\text{div}^y\vec{q}^{(0)} = 0 \quad (25a)$$

$$\text{div}^x\vec{q}^{(0)} + \text{div}^y\vec{q}^{(1)} + f = 0 \quad (25b)$$

$$\text{div}^x\vec{q}^{(1)} + \text{div}^y\vec{q}^{(2)} = 0 \quad (25c)$$

$$\dots = 0$$

L'identification terme à terme du développement de la loi de Fourier (20b) donne :

$$\vec{q}^{(0)} = -K_{\otimes} \left(\overrightarrow{\text{grad}}^x\theta^{(0)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y\theta^{(1)} \right) \quad (26a)$$

$$\vec{q}^{(1)} = -K_{\otimes} \left(\overrightarrow{\text{grad}}^x\theta^{(1)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y\theta^{(2)} \right) \quad (26b)$$

.....

3.3.3 Equation de conservation macroscopique

Par intégration sur Y de (25b), il vient en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_Y \operatorname{div}^x \bar{q}^{(0)} ds^y + \int_{\partial Y} \bar{q}^{(1)} \cdot \bar{n} dl^y + f |Y| = 0$$

soit, comme $\bar{q}^{(1)} \cdot \bar{n}$ prend des valeurs opposées sur les faces opposés de ∂Y (voir (24)) :

$$\int_Y \operatorname{div}^x \bar{q}^{(0)} ds^y + f |Y| = 0$$

En intervertissant la divergence par rapport à \vec{x} et l'intégrale sur Y et en divisant par $|Y|$, on obtient :

$$\operatorname{div}^x \langle \bar{q}^{(0)} \rangle + f = 0 \quad (27)$$

où la moyenne $\langle g \rangle$ sur Y d'une fonction g définie sur Y est définie par :

$$\langle g \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y g(\vec{y}) ds^y \quad (28)$$

Remarque 8. On peut remarquer que l'interversion de la dérivation par rapport à \vec{x} et de l'intégrale sur Y qui mène à l'équation de conservation macroscopique (27) est possible car la cellule Y ne dépend pas de \vec{x} . Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe 5 consacré aux milieux quasi périodiques.

3.3.4 Loi de Fourier macroscopique

Problème pour $\theta^{(1)}$ sur Y Etant donné $\overrightarrow{\operatorname{grad}}^x \theta^{(0)}$, trouver $\theta^{(1)}(\vec{x}, \vec{y})$ défini Y tel que :

$$\operatorname{div}^y \bar{q}^{(0)} = 0 \quad (29a)$$

$$\bar{q}^{(0)} = -K(\vec{y}) \otimes \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}^x \theta^{(0)} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}^y \theta^{(1)} \right) \quad (29b)$$

$$\theta^{(1)} \text{ égal sur les bords opposés de } \partial Y \quad (29c)$$

$$\bar{q}^{(0)} \cdot \bar{n} \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y \quad (29d)$$

On peut montrer que ce problème admet une solution $\theta^{(1)}$ définie à une constante près, c'est-à-dire ici à une fonction de \vec{x} près.

Ce problème résolu, on obtient la loi de Fourier par intégration de (29b) :

$$\langle \bar{q}^{(0)} \rangle = -\frac{1}{|Y|} \int_Y \left(K(\vec{y}) \otimes \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}^x \theta^{(0)} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}^y \theta^{(1)} \right) \right) ds^y \quad (30)$$

Dans le cas étudié où la loi de Fourier est linéaire, $\theta^{(1)}$ dépend linéairement de $\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$, c'est-à-dire que $\theta^{(1)}$ s'écrit $\theta^{(1)} = \vec{\chi}(\vec{y}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \bar{\theta}^{(1)}(\vec{x})$ où $\bar{\theta}^{(1)}$ est la fonction de \vec{x} qui reste indéterminée dans le problème (29) et où la fonction vectorielle $\vec{\chi}(\vec{y})$ est solution du problème :

$$\text{div}^y Q^T = 0 \quad (31a)$$

$$Q = -K \circ \left(\mathbb{I} + (\nabla^y \vec{\chi})^T \right) \quad (31b)$$

$$\vec{\chi} \text{ égal sur les bords opposés de } \partial Y \quad (31c)$$

$$Q^T \text{ @ } \vec{n} \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y \quad (31d)$$

et où $\bar{\theta}^{(1)}$ est une fonction de \vec{x} seul.

En effet, d'après (31c), $\theta^{(1)}$ défini par :

$$\theta^{(1)} = \vec{\chi}(\vec{y}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \bar{\theta}^{(1)}(\vec{x}) \quad (32)$$

prend bien des valeurs égales sur les cotés opposés de Y .

D'autre part, en différenciant par rapport à \vec{y} , on a :

$$d\theta^{(1)} = (\nabla \vec{\chi} \text{ @ } d\vec{y}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$$

d'où :

$$\overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(1)} = \nabla \vec{\chi}^T \text{ @ } \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$$

et, pour que l'équation (29b) soit vérifiée, on pose :

$$\vec{q}^{(0)} = -K(\vec{y}) \text{ @ } \left(\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(1)} \right) = -K \circ \left(\mathbb{I} + (\nabla^y \vec{\chi})^T \right) \text{ @ } \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\vec{q}^{(0)} = Q \text{ @ } \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} \quad (33)$$

où :

$$Q = -K \circ \left(\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T \right) \quad (34)$$

D'après la définition (91) de la divergence d'un champ de tenseur donnée en annexe, on a, $\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$ étant indépendant de \vec{y} :

$$\text{div}^y \vec{q}^{(0)} = \text{div}^y \left(Q \text{ @ } \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} \right) = \text{div}^y Q^T \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} \quad (35)$$

et enfin, d'après la définition du transposé Q^T de Q , on a :

$$\vec{q}^{(0)} \cdot \vec{n} = \left(Q @ \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} \right) \cdot \vec{n} = (Q^T @ \vec{n}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} \quad (36)$$

Compte tenu des équations (31a) et (31d) vérifiées par Q , les deux équations (35) et (36) montrent que $\vec{q}^{(0)}$ vérifie les équations (29a) et (29d).

On a ainsi vérifié que $\theta^{(1)}$ et $\vec{q}^{(0)}$ définis par (32) et (33) sont solution du problème (29).

Remarque 9. Le champ de vecteurs $\vec{\chi}$ n'est pas défini de façon unique, on peut montrer qu'il est défini à un vecteur additif près ce qui fait que son gradient $\nabla^y \vec{\chi}$ est, lui, défini de façon unique. Pour déterminer complètement $\vec{\chi}$, il faut ajouter une équation vectorielle qui fixe le vecteur d'indétermination, une façon de faire est d'imposer :

$$\int_Y \vec{\chi} ds^y = 0 \quad (37)$$

On peut écrire :

$$\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T = \nabla^y (\vec{y} + \vec{\chi})^T$$

et, en posant :

$$\vec{\tilde{\chi}} = \vec{y} + \vec{\chi}$$

le problème (31) devient :

$$\text{div}^y Q^T = 0 \quad (38a)$$

$$Q = -K \circ \nabla^y \vec{\tilde{\chi}}^T \quad (38b)$$

$$\left[\left[\vec{\tilde{\chi}} \right] \right]^i = \vec{Y}^i \text{ sur } \Gamma^i, i = 1, 2 \quad (38c)$$

$$Q^T @ \vec{n} \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y \quad (38d)$$

Version « indicielle » En utilisant la notation indicielle des vecteurs (voir annexe), le problème (29) s'écrit : Etant donné $\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$, trouver $\theta^{(1)}(\vec{x}, \vec{y})$ défini Y tel que :

$$\partial_i^y q_i^{(0)} = 0 \quad (39a)$$

$$q_i^{(0)} = -K_{ij}(\vec{y}) (\partial_j^x \theta^{(0)} + \partial_j^y \theta^{(1)}) \quad (39b)$$

$$\theta^{(1)} \text{ égal sur les bords opposés de } \partial Y \quad (39c)$$

$$q_i^{(0)} n_i \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y \quad (39d)$$

On écrit que $\theta^{(1)}$ dépend linéairement des composantes $\partial_k^x \theta^{(0)}$ de $\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$, c'est-à-dire :

$$\theta^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) = \chi_k(\vec{y}) \partial_k^x \theta^{(0)} + \bar{\theta}^{(1)}(\vec{x}) \quad (40)$$

pour cette expression de $\theta^{(1)}$, on a :

$$\partial_i^y \theta^{(1)} = \partial_i^y \chi_k \partial_k^x \theta^{(0)}$$

d'où :

$$q_i^{(0)} = -K_{ij} (\delta_{jk} + \partial_j^y \chi_k) \partial_k^x \theta^{(0)} \quad (41)$$

On vérifie d'après cette expression que pour que (39a) soit vérifiée, il suffit que les fonctions scalaires $\chi_i(\vec{y})$ soient solutions des problèmes :

$$\partial_i^y \tau_i^k = 0 \quad (42a)$$

$$\tau_i^k = -K_{ij} (\delta_{jk} + \partial_j^y \chi_k) \quad (42b)$$

$$\chi_k \text{ égal sur les bords opposés de } \partial Y \quad (42c)$$

$$\tau_i^k n_i \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y \quad (42d)$$

De même que le vecteur $\vec{\chi}$ solution du problème (31), les fonctions χ_k ne sont définies par (39) qu'à des fonctions scalaires de \vec{x} près et de même, on peut rendre la détermination unique en imposant par exemple :

$$\int_Y \chi_k ds^y = 0 \quad (43)$$

Remarque 10. En gardant les fonctions χ_k comme inconnues (et non le vecteur $\vec{\chi}$, on peut récrire le problème (42) sous la forme vectorielle :

$$\text{div} \vec{\tau}^k = 0 \quad (44a)$$

$$\vec{\tau}^k = -K \circledast \overrightarrow{\text{grad}}^y (y_k + \chi_k) \quad (44b)$$

$$\chi_k \text{ égal sur les bords opposés de } \partial Y \quad (44c)$$

$$\vec{\tau}^k \cdot \vec{n} \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y \quad (44d)$$

Exercice 11. En imposant les conditions (37) et (39a) pour rendre la détermination de $\vec{\chi}$ et des χ_k unique, vérifier que $\vec{\chi} = \chi_k \vec{e}_k$, c'est-à-dire que les χ_k sont les composantes de $\vec{\chi}$ sur la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) utilisée pour l'écriture indicielle des tenseurs et que $Q = \tau_i^k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k$.

Tenseur de conductivité thermique homogénéisé En prenant la moyenne de (33) sur Y , on obtient la loi de Fourier homogénéisée :

$$\langle \vec{q}^{(0)} \rangle = \langle Q \rangle \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$$

qu'on écrit :

$$\langle \vec{q}^{(0)} \rangle = -K^H \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$$

en définissant le tenseur de conductivité thermique homogénéisé K^H par :

$$K^H = -\langle Q \rangle \quad (45)$$

soit, compte tenu de (31b) :

$$K^H = \langle K \circ (\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T) \rangle \quad (46)$$

Version « indicielle » En prenant la moyenne sur Y de (41), on obtient :

$$\langle q_i^{(0)} \rangle = -\langle K_{ij} (\delta_{jk} + \partial_j^y \chi_k) \rangle \partial_k^x \theta^{(0)}$$

La loi de Fourier macroscopique peut donc s'écrire :

$$\langle q_i^{(0)} \rangle = -K_{ij}^H \partial_j^x \theta^{(0)}$$

où le tenseur de conductivité thermique homogénéisé K_{ij}^H est :

$$K_{ik}^H = \langle K_{ij} (\delta_{jk} + \partial_j^y \chi_k) \rangle$$

Exercice 12. Reprendre l'étude asymptotique en partant du développement (22) dans lequel le premier terme est supposé dépendre des deux variables de grande et de petite échelles, c'est-à-dire de la forme :

$$\theta^\epsilon(\vec{x}) = \theta^{(0)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon \theta^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 \theta^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots$$

On pourra, au choix, travailler en notation « vectorielle », équations (18), ou « indicielle », équations (19).

Homogénéiser un milieu stratifié constitué de la répétition périodique dans la direction x_2 de deux matériaux de conductivité thermique isotrope k_1 et k_2 et d'épaisseurs $\ell_1 = \epsilon L_1$ et $\ell_2 = \epsilon L_2$.

Homogénéiser un milieu périodique constitué d'un milieu homogène contenant des inclusions disjointes de conductivité très élevée, c'est-à-dire dans lesquelles la température est constante.

3.4 Formulations variationnelles

Dans ce paragraphe on établit les formulations variationnelles des problèmes (29), (31), (38), (39) et (42) en partant des différentes formulations faibles établies à l'annexe ???. Ces formulations variationnelles sont utiles à plus d'un titre, elles sont le point de départ de la résolution par éléments finis, elles permettent d'établir des résultats mathématiques d'existence et d'unicité ainsi que les propriétés de symétrie des lois homogénéisées.

3.4.1 Formulation variationnelle pour $\theta^{(1)}$

Suivant (29a), le champ $\vec{q}^{(0)}$ est à divergence nulle donc, d'après (97), la formulation faible de (29a) s'écrit :

$$\forall \eta \text{ périodique}, - \int_Y \vec{q}^{(0)} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \, ds^y = 0$$

en reportant l'équation (29b) dans la formulation précédente, on obtient la formulation variationnelle du problème (29) qui s'énonce :

Trouver $\theta^{(1)}$ périodique c'est-à-dire vérifiant $[[\theta^{(1)}]]^i = 0, i = 1, 2$ et tel que :

$$\forall \eta \text{ périodique}, \int_Y \left(K_{\otimes} \left(\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(1)} \right) \right) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \, ds^y = 0$$

3.4.2 Formulations variationnelles pour le fonction vectorielle $\vec{\chi}$

En reportant la relation (31b) dans la forme faible (109) où $\sigma = Q^T$, on obtient la formulation variationnelle du problème (31) qui s'énonce :

Trouver $\vec{\chi}$ périodique c'est-à-dire vérifiant $[[\vec{\chi}]]^i = 0, i = 1, 2$ et tel que :

$$\forall \vec{w} \text{ périodique}, \int_Y \left(K \circ (\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T) \right) : \nabla^y \vec{w}^T \, ds^y = 0 \quad (47)$$

Conséquence Pour $\vec{w} = A\circ\vec{v}$ où A est une application linéaire constante et \vec{v} y -périodique, on a :

$$\nabla^y \vec{w} = A \circ \nabla^y \vec{v}$$

et la formulation variationnelle (47) devient :

$$\forall A \text{ constante et } \vec{v} \text{ périodique, } \int_Y (K \circ (\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T)) : (\nabla^y \vec{v}^T \circ A^T) \, ds^y = 0$$

or :

$$\begin{aligned} B : (C^T \circ A^T) &= \text{tr}(B \circ A \circ C) \\ &= \text{tr}(C \circ B \circ A) \\ &= C \circ B : A^T \end{aligned}$$

et la formulation précédente s'écrit :

$$\forall A \text{ constante et } \vec{v} \text{ périodique, } \int_Y (\nabla^y \vec{v} \circ K \circ (\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T)) : A^T \, ds^y = 0$$

soit, comme A est constante et quelconque :

$$\forall \vec{v} \text{ périodique } \int_Y (\nabla^y \vec{v} \circ K \circ (\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T)) \, ds^y = 0 \quad (48)$$

3.4.3 Formulations variationnelles pour la fonction vectorielle $\vec{\chi}$

La formulation faible (112) pour $\sigma = Q^T$ s'écrit :

$$\forall \vec{w}, [[\vec{w}]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, - \int_Y Q^T : \nabla^y \vec{w} \, ds^y + \sum_{i=1,2} \left([[\vec{w}]]^i \otimes \vec{N}^i \right) : \langle Q^T \rangle = 0$$

or :

$$\forall A, B \in \mathcal{L}(V), A : B = \text{tr}(A \circ B^T) = \text{tr}(B^T \circ A) = B^T : A^T$$

d'où :

$$\forall \vec{w}, [[\vec{w}]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, - \int_Y Q : \nabla^y \vec{w}^T \, ds^y + \sum_{i=1,2} \left(\vec{N}^i \otimes [[\vec{w}]]^i \right) : \langle Q \rangle = 0$$

En reportant la relation (38b) dans cette forme faible, on obtient la formulation variationnelle du problème (38) qui s'énonce :

Trouver $\vec{\chi}$ vérifiant $[[\vec{\chi}]]^i = \vec{Y}^i$ sur Γ^i , $i = 1, 2$ et $\langle Q \rangle$ tels que :

$$\forall \vec{w}, [[\vec{w}]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \int_Y \left(K \circ \nabla^y \vec{\chi}^T \right) : \nabla^y \vec{w}^T ds^y + \sum_{i=1,2} \left(\vec{N}^i \otimes [[\vec{w}]]^i \right) : \langle Q \rangle = 0$$

L'intérêt de cette formulation est qu'elle permet dans un calcul par éléments finis de déterminer le tenseur de conductivité homogénéisé $K^H = -\langle Q \rangle$ (voir (45)) directement sans avoir à faire des calculs d'intégrale.

3.4.4 Formulations variationnelles pour les fonctions χ_k

Conformément à (97), la formulation faible de (44a) s'écrit :

$$\forall \eta \text{ périodique}, - \int_Y \vec{\tau}^k \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta ds^y = 0$$

en reportant l'équation (44b) dans la formulation précédente, on obtient la formulation variationnelle du problème (44) qui s'énonce :

Trouver χ_k périodique c'est-à-dire vérifiant $[[\chi^k]]^i = 0$, $i = 1, 2$ et tel que :

$$\forall \eta \text{ périodique}, \int_Y \left(K \circ \overrightarrow{\text{grad}}^y (y_k + \chi_k) \right) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta ds^y = 0$$

soit aussi en notation indicielle :

Trouver χ_k périodique c'est-à-dire vérifiant $[[\chi^k]]^i = 0$, $i = 1, 2$ et tel que :

$$\forall \eta \text{ périodique}, \int_Y K_{ij} (\delta_{jk} + \partial_j^y \chi_k) \partial_i^y \eta ds^y = 0$$

Après changement du nom des indices, on obtient la formulation variationnelle du problème pour les χ_j :

Trouver χ_j périodique tel que

$$\forall \eta \text{ périodique}, \int_Y K_{hk} (\delta_{kj} + \partial_k^y \chi_j) \partial_h^y \eta ds^y = 0 \quad (49)$$

3.5 Propriétés des coefficients homogénéisés

Le tenseur de conductivité homogénéisé K^H de la loi de Fourier macroscopique est défini par (46) c'est-à-dire :

$$|Y| K^H = \int_Y K \circ (\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T) \, ds^y$$

d'où en ajoutant (48) où $\vec{v} = \vec{\chi}$:

$$|Y| K^H = \int_Y (\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}) \circ K \circ (\mathbb{I} + \nabla^y \vec{\chi}^T) \, ds^y$$

Ce qui, en raison de la symétrie de K , montre que K^H est symétrique.

Version « indicielle » On a :

$$K_{ij}^H = \langle K_{ik} (\delta_{kj} + \partial_k^y \chi_j) \rangle$$

c'est-à-dire :

$$|Y| K_{ij}^H = \int_Y K_{ik} (\delta_{kj} + \partial_k^y \chi_j) \, ds^y$$

soit aussi :

$$|Y| K_{ij}^H = \int_Y K_{hk} (\delta_{kj} + \partial_k^y \chi_j) \delta_{ih} \, ds^y$$

d'où en ajoutant (49) où $\eta = \chi_i$:

$$|Y| K_{ij}^H = \int_Y K_{hk} (\delta_{kj} + \partial_k^y \chi_j) (\delta_{ih} + \partial_h^y \chi_i) \, ds^y$$

K étant symétrique, cela montre que l'opérateur K^H est symétrique.

3.5.1 Calculs par éléments finis

Pour obtenir l'application homogénéisée K^H donnée par (46), il faut déterminer $\vec{\chi}$ défini par le problème (31) sous forme forte ou (47) sous forme variationnelle ou, si on préfère, déterminer les composantes χ_j de $\vec{\chi}$ par (49) ou (49). Sauf cas particulier (voir l'exercice 12), la détermination de $\vec{\chi}$ nécessite un calcul numérique, assez naturellement par éléments finis.

4 Homogénéisation d'un composite élastique

4.1 Milieu élastique périodique

L'adaptation de l'étude du paragraphe 3 à un milieu élastique périodique finement hétérogène est directe.

On considère l'équilibre d'un milieu linéairement élastique dans le cadre des petites transformations occupant le domaine Ω (de dimension 2). L'équation d'équilibre, dit indéfini, qui est un équation de conservation, comme l'équation (18a), s'écrit :

$$\operatorname{div}^x \sigma + \vec{f} = 0 \text{ dans } \Omega$$

soit en notation indicelle :

$$\partial_i^x \sigma_{ij} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega$$

où σ est le tenseur des contraintes et \vec{f} une densité surfacique de forces. La loi de comportement isotrope, dite aussi loi de Hooke, s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}^x(\vec{u}) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(\vec{u})$$

où \vec{u} est le champ de déplacement du milieu, $e^x(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left(\nabla^x \vec{u} + (\nabla^x \vec{u})^T \right)$ le tenseur des déformations, c'est-à-dire la partie symétrique de la différentielle $\nabla^x \vec{u}$ (voir l'annexe A) et λ et μ les coefficients de Lamé du matériau. Pour la mise en œuvre de la méthode asymptotique d'homogénéisation, il est plus simple de considérer une loi anisotrope qui s'écrit :

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} e_{kl}(\vec{u})$$

où les coefficient d'élasticité vérifie les symétries usuelles

$$A_{ijkl} = A_{klij} = A_{ijlk}$$

On écrit aussi la loi de comportement sous la forme :

$$\sigma = A @ e^x(\vec{u})$$

où A désigne le tenseur du 4^e ordre de composantes A_{ijkl} ; en l'occurrence, A est considéré comme une application linéaire de l'espace $\mathcal{L}^S(V)$ des tenseurs d'ordre 2 dans lui-même et $A @ e^x(\vec{u})$ désigne l'image du tenseur des déformations par l'application linéaire A .

Comme dans le paragraphe 3 sur la conduction thermique, le tenseur 4^e ordre A dépend périodiquement de \vec{x} , il est défini de façon analogue au tenseur de conductivité thermique K^ϵ (21), la cellule Y étant définie de façon analogue.

Les équations de l'élasticité considérées pour l'étude de l'homogénéisation sont par conséquent :

$$\operatorname{div}^x \sigma^\epsilon + \vec{f} = 0 \text{ dans } \Omega \quad (50a)$$

$$\sigma^\epsilon = A^\epsilon(\vec{x}) \otimes e^x(\vec{u}^\epsilon) \text{ dans } \Omega \quad (50b)$$

+ conditions aux limites non précisées

où :

$$A^\epsilon(\vec{x}) = A\left(\frac{\vec{x}}{\epsilon}\right)$$

$A(\vec{y})$ étant défini sur la cellule Y .

4.2 Développements asymptotiques

4.2.1 Développement en double échelle des champs de déplacement, de contraintes et de leurs dérivées

Comme en 3, on cherche le champ de déplacement sous la forme d'un développement en double échelle :

$$\vec{u}^\epsilon(\vec{x}) = \vec{u}^{(0)}(\vec{x}) + \epsilon \vec{u}^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 \vec{u}^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots \quad (51)$$

où les $\vec{u}^{(n)}(\vec{x}, \vec{y})$ sont y -périodiques de période Y .

Par dérivation de (51), il vient :

$$\nabla^x \vec{u}^\epsilon = \nabla^x \vec{u}^{(0)} + \nabla^y \vec{u}^{(1)} + \epsilon (\nabla^x \vec{u}^{(1)} + \nabla^y \vec{u}^{(2)}) + \dots$$

d'où pour le tenseur des déformations :

$$e^x(\vec{u}^\epsilon) = e^x(\vec{u}^{(0)}) + e^y(\vec{u}^{(1)}) + \epsilon (e^x(\vec{u}^{(1)}) + e^y(\vec{u}^{(2)})) + \dots$$

Le développement de la loi de comportement montre que (50b) :

$$\sigma^\epsilon(\vec{x}) = \sigma^{(0)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon \sigma^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 \sigma^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots \quad (52)$$

où les $\sigma^{(n)}(\vec{x}, \vec{y})$ sont y -périodiques de période Y et donne les relations :

$$\sigma^{(0)} = A_{\otimes} (e^x(\vec{u}^{(0)}) + e^x(\vec{u}^{(1)})) \quad (53a)$$

$$\sigma^{(1)} = A_{\otimes} (e^x(\vec{u}^{(1)}) + e^x(\vec{u}^{(2)})) \quad (53b)$$

.....

Par dérivation de (52), on obtient :

$$\operatorname{div} \sigma^\epsilon(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}^y \sigma^{(0)} + \operatorname{div}^x \sigma^{(0)} + \operatorname{div}^y \sigma^{(1)} + \epsilon (\operatorname{div}^x \sigma^{(1)} + \operatorname{div}^y \sigma^{(2)}) + \dots$$

et le développement de l'équation d'équilibre (50a) s'écrit :

$$\frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}^y \sigma^{(0)} + \operatorname{div}^x \sigma^{(0)} + \operatorname{div}^y \sigma^{(1)} + \epsilon (\operatorname{div}^x \sigma^{(1)} + \operatorname{div}^y \sigma^{(2)}) + \dots + \vec{f} = 0$$

d'où en identifiant les termes de même puissance de ϵ :

$$\operatorname{div}^y \sigma^{(0)} = 0 \tag{54a}$$

$$\operatorname{div}^x \sigma^{(0)} + \operatorname{div}^y \sigma^{(1)} + \vec{f} = 0 \tag{54b}$$

$$\operatorname{div}^x \sigma^{(1)} + \operatorname{div}^y \sigma^{(2)} = 0 \tag{54c}$$

$$\dots = 0$$

4.2.2 Equation d'équilibre macroscopique

L'équation d'équilibre s'obtient par intégration sur Y de (54b) en suivant la procédure utilisée au paragraphe 3.3.3 pour obtenir l'équation de conservation de la chaleur macroscopique (27), on obtient :

$$\operatorname{div}^x \langle \sigma^{(0)} \rangle + \vec{f} = 0 \tag{55}$$

4.2.3 Loi de comportement macroscopique

Par analogie avec le paragraphe 3, la détermination de la loi de comportement macroscopique passe par la résolution d'un problème d'élasticité sur la cellule Y .

Problème pour $\vec{u}^{(1)}$ sur Y Etant donné $e^x(\vec{u}^{(0)})$, trouver $\vec{u}^{(1)}(\vec{x}, \vec{y})$ défini Y tel que :

$$\operatorname{div}^y \sigma^{(0)} = 0 \tag{56a}$$

$$\sigma^{(0)} = A_{\otimes} (e^x(\vec{u}^{(0)}) + e^x(\vec{u}^{(1)})) \tag{56b}$$

$$\vec{u}^{(1)} \text{ égal sur les bords opposés de } \partial Y \tag{56c}$$

$$\sigma^{(0)}_{\otimes \vec{n}} \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y \tag{56d}$$

Ce problème résolu, on obtient la loi de comportement par intégration de (56b) :

$$\langle \sigma^{(0)} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y (A_{\otimes} (e^x(\vec{u}^{(0)}) + e^x(\vec{u}^{(1)}))) \, ds^y \tag{57}$$

Le problème (56) est linéaire et, comme dans l'étude du problème de thermique, on peut montrer que la solution \vec{u} s'écrit $\vec{u}^{(1)} = \vec{\chi}^{ij}(\vec{y}) e_{ij}^x(\vec{u}^{(0)}) + \vec{u}^{(1)}(\vec{x})$ où $\vec{u}^{(1)}$ est une fonction de \vec{x} indéterminée dans le problème (56) et où les fonctions $\vec{\chi}^{ij}(\vec{y})$ sont solutions des problèmes :

:

$$\operatorname{div} \tau^{ij} = 0 \quad (58a)$$

$$\tau^{ij} = A @ e^y ((y_k + \vec{\chi}^{ij})) \quad (58b)$$

$$\vec{\chi}^{ij} \text{ égal sur les bords opposés de } \partial Y \quad (58c)$$

$$\tau^k @ \vec{n} \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y \quad (58d)$$

Remarque 13. Les fonctions $\vec{\chi}^{ij}$ sont vectorielles parce $\vec{u}^{(1)}$ est vectorielle, ces fonctions sont les analogues des fonctions scalaires χ_k de (42) et non de la fonction vectorielle $\vec{\chi}$ de (31). Il est possible d'introduire, pour le problème d'élasticité, l'équivalent des fonctions vectorielles $\vec{\chi}$ de (31) introduites pour le problème de thermique. Cependant, le rôle de toutes ces fonctions étant de traduire la linéarité de $\vec{u}^{(1)}$ vis à vis de $e^x(\vec{u}^{(0)})$, c'est un tenseur du troisième ordre qu'il faut introduire en élasticité à la place de $\vec{\chi}$. En thermique, c'est la linéarité en question c'est celle de $\theta^{(1)}$ vis à vis de $\overrightarrow{\operatorname{grad}}^x(\theta^{(0)})$ et elle s'exprime à l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{\operatorname{grad}}^x(\theta^{(0)})$ avec la fonction vectorielle $\vec{\chi}$ de (31).

Exercice 14. Déterminer les Les coefficients d'élasticité homogénéisés A_{ijkl}^H en fonction des $\vec{\chi}^{ij}$.

Déterminer la formulation variationnelle du problème (58)

5 Milieux quasi périodiques

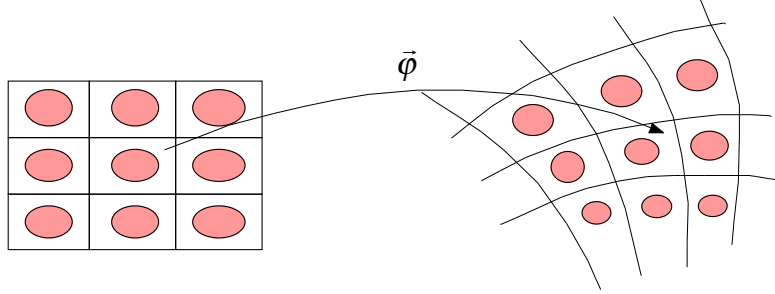
On appelle milieu quasi périodique un milieu qui n'est pas exactement périodique. Cela peut être dû à une dépendance à grande échelle des propriétés thermiques du matériau, c'est-à-dire que le tenseur de conductivité est de la forme $K^\epsilon(\vec{x}) = K(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon})$ où, pour tout \vec{x} , $K(\vec{x}, \vec{y})$ est défini dans une cellule Y indépendante de \vec{x} .

Cela peut aussi venir de l'absence d'une période géométrique exacte, on dira alors que le milieu est quasi périodique s'il présente une quasi période variant lentement d'une période à l'autre. On pourrait envisager de reprendre l'analyse de la partie 3 en considérant que la cellule Y dépend de la variable de grande échelle \vec{x} mais il ne serait plus possible d'invertir dérivation par rapport à la variable de grande échelle \vec{x} et l'intégration sur la cellule Y qui permet d'obtenir l'équation de conservation macroscopique (27).

Plus précisément, en supposant que le milieu occupe un domaine Ω , on dira que le milieu est géométriquement quasi périodique s'il existe un domaine $\tilde{\Omega}$ et une fonction bijective $\vec{\varphi}$ de $\tilde{\Omega}$ dans Ω :

$$\vec{x} \in \tilde{\Omega} \xrightarrow{\vec{\varphi}} \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{x}) \in \Omega$$

telle que le milieu soit géométriquement périodique en variable \vec{x} .



Le premier cas, qu'on pourrait appeler quasi périodicité « comportementale », est l'objet des exercices 15, le second cas, qu'on pourrait appeler quasi périodicité « géométrique » (ce qui n'exclut pas la quasi périodicité « comportementale », est l'objet de la suite de cette partie.

Exercice 15. Reprendre l'analyse de la partie 3 dans le cas où :

- $K^\epsilon(\vec{x}) = K\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right)$
- $K^\epsilon(\vec{x}) = K^{(0)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon K^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 K^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots$

5.1 Milieux géométriquement quasi périodiques

On se ramène à l'étude du cas exactement périodique de la partie 3 en ramenant toutes les équations sur le domaine $\tilde{\Omega}$ par un changement de variables.

5.1.1 Changement de variables

Les équations régissant la conduction stationnaire de la chaleur dans le domaine Ω sont celles de (18), avant d'envisager d'utiliser la méthode de développement asymptotique, il faut ramener les équations sur le domaine $\tilde{\Omega}$ par le changement de variables :

$$\vec{x} \in \tilde{\Omega} \longleftrightarrow \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{x}) \in \Omega$$

Cette opération est facilitée par l'utilisation de formulations faibles. En suivant la démarche présentée à l'annexe B, on obtient la formulation faible de (18a) qui s'écrit :

$$\forall \eta, \eta = 0 \text{ sur } \partial\Omega, - \int_{\Omega} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \eta \, ds^x + \int_{\Omega} f \eta \, ds^x = 0 \quad (59)$$

où, comme on ne se préoccupe pas des conditions de bord, on a pris une fonction test η s'annulant sur le bord $\partial\Omega$ pour simplifier le changement de variables. Le changement de variables s'applique aux intégrales et aux gradients de fonctions.

En notant du même symbole les fonctions de \tilde{x} et de \vec{x} , ce qui est un abus de notations, on a :

$$\begin{aligned} d\eta &= \overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{x}} \eta \cdot d\vec{\tilde{x}} + \dots \\ &= \overrightarrow{\text{grad}}^x \eta \cdot d\vec{x} + \dots \end{aligned}$$

or :

$$d\vec{x} = \nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi} @ d\vec{\tilde{x}} + \dots$$

d'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{x}} \eta \cdot d\vec{\tilde{x}} &= \overrightarrow{\text{grad}}^x \eta \cdot \left(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi} @ d\vec{\tilde{x}} \right) + \dots \\ &= \left((\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^T @ \overrightarrow{\text{grad}}^x \eta \right) \cdot d\vec{\tilde{x}} + \dots \end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$\overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{x}} \eta = (\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^T @ \overrightarrow{\text{grad}}^x \eta \quad (60)$$

et, en inversant cette relation :

$$\overrightarrow{\text{grad}}^x \eta = (\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^{-T} @ \overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{x}} \eta$$

où $(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^{-T}$ désigne l'inverse de $(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^T$.

On a d'autre part :

$$ds^x = \det (\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}) \, ds^{\tilde{x}}$$

Le changement de variables dans la formulation (59) donne par conséquent :

$$\forall \eta, \eta = 0 \text{ sur } \partial\tilde{\Omega}, - \int_{\tilde{\Omega}} \vec{q} \cdot \left((\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^{-T} @ \overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{x}} \eta \right) \det (\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}) \, ds^{\tilde{x}} + \int_{\tilde{\Omega}} f \eta \det (\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}) \, ds^{\tilde{x}} = 0 \quad (61)$$

soit aussi :

$$\forall \eta, \eta = 0 \text{ sur } \partial\tilde{\Omega}, - \int_{\tilde{\Omega}} \left((\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^{-1} \circledast \vec{q} \right) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{x}} \eta \det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}) ds^{\tilde{x}} + \int_{\Omega} f \eta \det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}) ds^{\tilde{x}} = 0 \quad (62)$$

La loi de Fourier (18b) devient quant à elle :

$$\vec{q} = - \left(K \circ (\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^{-T} \right) \circledast \overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{x}} \theta \text{ dans } \tilde{\Omega} \quad (63)$$

La forme forte de la formulation (62) est :

$$\text{div}^{\tilde{x}} \vec{q} + \tilde{f} = 0 \quad (64)$$

où :

$$\vec{q} = \det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}) (\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^{-1} \circledast \vec{q} \quad (65)$$

$$\tilde{f} = f \det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}) \quad (66)$$

En utilisant la loi de Fourier, modifiée par changement de variables, (63), on obtient :

$$\vec{q} = - \det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}) \left((\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^{-1} \circ K \circ (\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^{-T} \right) \circledast \overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{x}} \theta$$

ce qu'on peut écrire :

$$\vec{q} = -\tilde{K} \circledast \overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{x}} \theta \quad (67)$$

où :

$$\tilde{K} = \det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}) (\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}^{-1} \circ K \circ \nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}^{-T}) \quad (68)$$

En rassemblant ces résultats, les équations régissant la conduction thermique sur $\tilde{\Omega}$ sont :

$$\text{div}^{\tilde{x}} \vec{q} + \tilde{f} = 0 \quad (69a)$$

$$\vec{q} = -\tilde{K} \circledast \overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{x}} \theta \quad (69b)$$

où \vec{q} , \tilde{f} et \tilde{K} sont donnés en fonction de \vec{q} , f et K et $\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}$ par les relations (65), (66) et (68).

5.2 Homogénéisation de milieux géométriquement quasi périodiques

On suppose que le milieu est périodique en variable \vec{x} de période $\epsilon\tilde{Y}$, c'est-à-dire ici que le tenseur de conductivité thermique, noté K^ϵ , est de la forme :

$$K^\epsilon(\vec{x}) = K\left(\frac{\vec{x}}{\epsilon}\right)$$

Comme l'homogénéisation asymptotique qui consiste à faire tendre ϵ vers 0 est un « processus de pensée », on pourrait considérer que $\vec{\varphi}$ dépend de ϵ et se développe en :

$$\vec{\varphi}^\epsilon(\vec{x}) = \vec{\varphi}^{(0)}(\vec{x}) + \epsilon\vec{\varphi}^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2\vec{\varphi}^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots$$

cela est nécessaire en mécanique des milieux continus en grandes transformations quand $\vec{\varphi}$ est la fonction placement inconnue du milieu. Dans le cas présent $\vec{\varphi}$ est une donnée et pour simplifier on la prend indépendante de ϵ .

On voit par conséquent que le \tilde{K}^ϵ correspondant à K^ϵ par (68) s'écrit en fonction de \vec{x} et $\frac{\vec{x}}{\epsilon}$:

$$\tilde{K}^\epsilon(\vec{x}) = \tilde{K}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right)$$

où $\tilde{K}(\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{y} \in \tilde{Y}$ vaut

$$\tilde{K}(\vec{x}, \vec{y}) = \det(\nabla^{\vec{x}}\vec{\varphi}) \left(\nabla^{\vec{x}}\vec{\varphi}^{-1} \circ K(\vec{y}) \circ \nabla^{\vec{x}}\vec{\varphi}^{-T} \right) \quad (70)$$

On cherche θ^ϵ sous la forme du développement en double échelle :

$$\theta^\epsilon(\vec{x}) = \theta^{(0)}(\vec{x}) + \epsilon\theta^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2\theta^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots \quad (71)$$

où les $\theta^{(n)}(\vec{x}, \vec{y})$ sont \tilde{y} -périodiques de période \tilde{Y} et on procède comme au paragraphe 3.3. La dérivation de (71) et la loi de Fourier (67) montre que \vec{q}^ϵ se développe en :

$$\vec{q}^\epsilon(\vec{x}) = \vec{q}^{(0)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon\vec{q}^{(1)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2\vec{q}^{(2)}\left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\epsilon}\right) + \dots$$

Le développement des équations (69) est analogue à celui fait au paragraphe 3.3. On obtient donc les résultats suivants.

L'équation de conservation macroscopique sur $\tilde{\Omega}$ s'écrit :

$$\operatorname{div}^{\tilde{x}} \left\langle \vec{q}^{(0)} \right\rangle_{\tilde{Y}} + \left\langle \tilde{f} \right\rangle_{\tilde{Y}} = 0 \quad (72)$$

où les moyennes $\left\langle \vec{q}^{(0)} \right\rangle_{\tilde{Y}}$ et $\left\langle \tilde{f} \right\rangle_{\tilde{Y}}$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{q}^{(0)} \right\rangle_{\tilde{Y}} &= \frac{1}{|\tilde{Y}|} \int_{\tilde{Y}} \vec{q} \, ds^{\tilde{y}} \\ \left\langle \tilde{f} \right\rangle_{\tilde{Y}} &= \frac{1}{|\tilde{Y}|} \int_{\tilde{Y}} \tilde{f} \, ds^{\tilde{y}} \end{aligned}$$

avec $|\tilde{Y}| = \int_{\tilde{Y}} ds^{\tilde{y}}$

Le problème sur la cellule \tilde{Y} permettant de déterminer la « loi de Fourier » macroscopique dans $\tilde{\Omega}$ est défini par les équations :

$$\operatorname{div}^{\tilde{y}} \vec{q}^{(0)} = 0 \quad (73a)$$

$$\vec{q}^{(0)} = -\tilde{K}_{\otimes} \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}^{\tilde{x}} \theta^{(0)} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}^{\tilde{y}} \theta^{(1)} \right) \quad (73b)$$

$$\theta^{(0)} \text{ égal sur les bords opposés de } \partial\tilde{Y} \quad (73c)$$

$$\vec{q}^{(0)} \cdot \vec{n} \text{ sur les bords opposés de } \partial\tilde{Y} \quad (73d)$$

Le problème étant linéaire linéaire, $\theta^{(1)}$ s'écrit :

$$\theta^{(1)} = \vec{\chi} \left(\vec{y} \right) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}^{\tilde{x}} \theta^{(0)} + \bar{\theta}^{(1)} \left(\vec{x} \right)$$

où $\bar{\theta}^{(1)}$ est une fonction de \vec{x} seul et où la fonction vectorielle $\vec{\chi} \left(\vec{y} \right)$ (qui n'a aucun rapport avec la fonction $\vec{\chi}$ de (38)) est solution du problème :

$$\operatorname{div}^{\tilde{y}} \tilde{Q}^T = 0 \quad (74a)$$

$$\tilde{Q} = -\tilde{K} \circ \left(\mathbb{I} + \left(\nabla^{\tilde{y}} \vec{\chi} \right)^T \right) \quad (74b)$$

$$\vec{\chi} \text{ égal sur les bords opposés de } \partial\tilde{Y} \quad (74c)$$

$$\tilde{Q}^T \cdot \vec{n} \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial\tilde{Y} \quad (74d)$$

Le tenseur de conductivité homogénéisé \tilde{K}^H vaut :

$$\tilde{K}^H = - \left\langle \tilde{Q} \right\rangle_{\tilde{Y}}$$

et la « loi de Fourier » dans $\tilde{\Omega}$ s'écrit :

$$\left\langle \tilde{q}^{(0)} \right\rangle_{\tilde{Y}} = -\tilde{K}^H \overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{x}} \theta^{(0)} \quad (75)$$

Toutes ces équations sont écrites sur $\tilde{\Omega}$ ou la cellule \tilde{Y} , il peut être utile de revenir à des équations écrites sur Ω ou sur une cellule locale au point Y^x . Le passage des équations sur $\tilde{\Omega}$ à des équations sur Ω se fait par le changement de variables $\tilde{x} \leftrightarrow \vec{x} = \vec{\varphi}(\tilde{x})$ utilisé au paragraphe 5.1.1) pour établir les équations de conduction sur $\tilde{\Omega}$.

On définit la cellule Y^x où $\vec{x} = \vec{\varphi}(\tilde{x})$ par :

$$Y^x = \vec{\psi}(\tilde{Y})$$

où la fonction $\vec{\psi}$ est définie par :

$$\vec{\psi}(\tilde{y}) = \nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi} @ \tilde{y} \quad (76)$$

Pour effectuer le changement de variables :

$$\tilde{y} \leftrightarrow \vec{y} = \vec{\psi}(\tilde{y}) = \nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi} @ \tilde{y} \quad (77)$$

dans les équations (73), il est utile de considérer la formulation faible de l'équation (73a) qui s'écrit :

$$\forall \eta, \tilde{y}\text{-périodique}, \int_{\tilde{Y}} \tilde{q}^{(0)} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{y}} \eta \, ds^{\tilde{y}} = 0 \quad (78)$$

En différenciant $\vec{\psi}$, il vient :

$$\nabla^{\tilde{y}} \vec{\psi} = \nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi}$$

dans le changement de variables (77), on a $\overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{y}} \eta = \left(\nabla^{\tilde{y}} \vec{\psi} \right)^T @ \overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{y}} \eta = \left(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi} \right)^T @ \overrightarrow{\text{grad}}^{\vec{y}} \eta$ et $ds^{\tilde{y}} = \frac{1}{\det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})} ds^{\vec{y}}$ et ce changement de variables appliqué à la formulation faible (78) donne :

$$\forall \vec{w}, \vec{y}\text{-périodique}, \int_Y \vec{q}^{(0)} \cdot \left(\left(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi} \right)^T @ \overrightarrow{\text{grad}}^{\vec{y}} \eta \right) \frac{1}{\det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})} ds^{\vec{y}} = 0$$

soit :

$$\forall \vec{w}, y\text{-périodique}, \int_Y \vec{q}^{(0)} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \, ds^y = 0$$

où on a posé :

$$\vec{q}^{(0)} = \frac{1}{\det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})} \nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi} \circ \vec{q}^{(0)} \quad (79)$$

On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{y}} \theta^{(1)} = (\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^T \circ \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(1)}$$

et, compte tenu de (79), la relation (73b) devient dans le changement de variables (77) :

$$\vec{q}^{(0)} = -\frac{1}{\det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})} \nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi} \circ \tilde{K} \circ \left(\overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{x}} \theta^{(0)} + (\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^T \circ \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(1)} \right)$$

or, d'après (60) $\overrightarrow{\text{grad}}^{\tilde{x}} \theta^{(0)} = (\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^T \circ \overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)}$ et :

$$\vec{q}^{(0)} = -\frac{1}{\det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})} \nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi} \circ \tilde{K} \circ (\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})^T \left(\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(1)} \right)$$

soit, compte tenu de (70) :

$$\vec{q}^{(0)} = -K \circ \left(\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(1)} \right)$$

Le problème pour $\theta^{(1)}$ et $\vec{q}^{(0)}$ sur Y^x s'écrit par conséquent :

$$\text{div}^y \vec{q}^{(0)} = 0 \quad (80a)$$

$$\vec{q}^{(0)} = -K \circ \left(\overrightarrow{\text{grad}}^x \theta^{(0)} + \overrightarrow{\text{grad}}^y \theta^{(1)} \right) \quad (80b)$$

$$\theta^{(0)} \text{ égal sur les bords opposés de } \partial Y^x \quad (80c)$$

$$\vec{q}^{(0)} \cdot \vec{n} \text{ sur les bords opposés de } \partial Y^x \quad (80d)$$

Dans le changement de variables (77) la moyenne sur \tilde{Y} $\langle g \rangle_{\tilde{Y}}$ se transforme directement en moyenne sur Y $\langle g \rangle_Y$ en effet on a :

$$\langle g \rangle_{\tilde{Y}} = \frac{1}{|\tilde{Y}|} \int_{\tilde{Y}} g \, ds^{\tilde{y}}$$

d'où dans le changement de variables :

$$\langle g \rangle_{\tilde{Y}} = \frac{1}{|\tilde{Y}|} \int_Y g \frac{1}{\det(\nabla^{\tilde{x}} \vec{\varphi})} \, ds$$

or bien évidemment $|\tilde{Y}| = \int_{\tilde{Y}} ds^{\tilde{y}} = \frac{1}{\det(\nabla^{\tilde{x}}\tilde{\varphi})} \int_Y ds^y = |Y|$ et $\langle g \rangle_{\tilde{Y}} = \langle g \rangle_Y$. On a donc d'après (66) :

$$\langle \tilde{f} \rangle = \langle f \rangle_Y \det(\nabla^{\tilde{x}}\tilde{\varphi})$$

et d'après (79) :

$$\langle \tilde{q}^{(0)} \rangle_Y = \frac{1}{\det(\nabla^{\tilde{x}}\tilde{\varphi})} \nabla^{\tilde{x}}\tilde{\varphi}_{@} \langle \tilde{q}^{(0)} \rangle_{\tilde{Y}}$$

on en déduit d'après (64) et (72) que dans Ω :

$$\operatorname{div}^x \langle \tilde{q}^{(0)} \rangle_Y + \langle f \rangle_Y = 0$$

Ce qui montre que la détermination de la loi de Fourier macroscopique sur Ω peut être menée sur la cellule locale Y^x comme si le milieu était exactement périodique.

En particulier, la linéarité des équations (80) montre que le tenseur de conductivité macroscopique K^H se calcule par

$$K^H = -\langle Q \rangle_Y$$

où Q est défini par la résolution des équations :

$$\operatorname{div}^y Q^T = 0 \tag{81a}$$

$$Q = -K \circ \left(\mathbb{I} + (\nabla^y \tilde{\chi})^T \right) \tag{81b}$$

$$\tilde{\chi} \text{ égal sur les bords opposés de } \partial Y^x \tag{81c}$$

$$Q^T @ \vec{n} \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y^x \tag{81d}$$

Deuxième partie

Modèles non linéaires

On distingue souvent en mécanique des milieux continus les nonlinéarités géométriques et matérielles. La non linéarité géométrique vient de la prise en compte de grands déplacements qui fait que les équations du mouvement sous leur forme habituelle, en particulier l'équilibre, doivent être écrites non pas sur la configuration de référence connue mais sur la configuration déformée inconnue, l'écriture de ces équations sur la configuration de référence faisant apparaître des termes non linéaires. La non linéarité matérielle est la conséquence d'une loi de comportement non linéaire. La distinction entre ces non linéarités est quelquefois assez spacieuse car en grands déplacements la loi

de comportement est pratiquement toujours non linéaire même en élasticité. Dans cette partie on ne considère que le cas de l'élasticité non linéaire en grands déplacements (appelés aussi grandes transformations).

6 Homogénéisation d'un milieu élastique périodique en grandes transformations

6.1 Grandes transformations

Même si cette nécessité s'estompe en petits déplacements, en mécanique des milieux continus comme dans le reste de la mécanique, il est nécessaire d'identifier les points matériels constituant le milieu. Il est fréquent d'identifier les points matériels du milieu par leurs positions notées \vec{X} dans une configuration particulière dite configuration de référence. Il faut noter que cette configuration peut-être contrainte et n'est pas nécessairement en équilibre dans cet état contraint.

L'étude et la modélisation des milieux continus consistent à établir les équations permettant de déterminer la position $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{X}, t)$ au cours du temps du point matériel identifié par sa position \vec{X} dans la configuration de référence noté Ω_R , cela pour chacun des points du milieu. La fonction $\vec{\varphi}$ est appelée fonction placement ou placement. La configuration $\Omega_t = \vec{\varphi}(\Omega_R, t)$ à l'instant t est appelée configuration actuelle ou configuration déformée si c'est un équilibre qui est étudié, elle est alors notée Ω .

Dans la suite on ne considère que le cas de l'équilibre sous l'action d'une densité surfacique (volumique à trois dimensions) de forces \vec{f} et d'une densité linéique (surfacique à trois dimensions) de forces \vec{F} appliquée sur le bord $\partial\Omega$ de Ω . Comme dans un premier temps on ne se préoccupe pas des conditions aux limites en homogénéisation, on n'a besoin que de l'équation d'équilibre dit indéfini qui s'écrit :

$$\operatorname{div}^x \sigma + \vec{f} = 0 \text{ dans } \Omega \quad (82)$$

où σ est le tenseur des contraintes ; \vec{x} est la variable du domaine Ω , elle est dite variable eulérienne.

Comme indiqué plus haut cette équation est écrite sur un domaine inconnu puisque $\Omega = \vec{\varphi}(\Omega_R)$ et que le placement $\vec{\varphi}$ est inconnu. Pour écrire l'équation d'équilibre sur le domaine Ω_R connu, il faut effectuer le changement de variables $\vec{X} \leftrightarrow \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{X})$ ce qui est facilité par l'utilisation de la formulation faible qui s'écrit (voir (95) et (107)) :

$$\forall \vec{w}, \vec{w} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, - \int_{\Omega} \sigma : \nabla^x \vec{w} \, ds^x + \int_{\Omega} \vec{f} \, ds^x = 0 \quad (83)$$

On définit la transformation linéaire tangente F par :

$$F = \nabla^X \vec{\varphi}$$

et dans le changement de variables $\vec{X} \leftrightarrow \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{X})$, on a :

$$\begin{aligned} \nabla^x \vec{w} &= \nabla^X \vec{w} \circ F \\ ds^x &= \det F ds^X \end{aligned}$$

La formulation faible (83) devient :

$$\forall \vec{w}, \vec{w} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_R, - \int_{\Omega_R} \sigma : (\nabla^X \vec{w} \circ F^{-1}) \det F ds^X + \int_{\Omega_R} \vec{f} \det F ds^X = 0$$

ce qu'on peut écrire :

$$\forall \vec{w}, \vec{w} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_R, - \int_{\Omega_R} T : \nabla^X \vec{w} ds^X + \int_{\Omega_R} \vec{f} ds^X = 0$$

où $\vec{f} = \vec{f} \det F$ $T = \det F \sigma : \circ F^{-T}$. T est le premier tenseur de Piola Kirchhoff, en abrégé *PK1*. Une intégration par parties montre que le tenseur T vérifie l'équation d'équilibre :

$$\operatorname{div}^X T + \vec{f} = 0 \text{ dans } \Omega_R$$

Le seul comportement considéré dans ce paragraphe est l'élasticité qui se traduit par une relation, en général non linéaire, entre T et la transformation linéaire tangente F :

$$T = \mathcal{T}(\vec{X}, F)$$

La variable \vec{X} est là pour souligner que le milieu est hétérogène. Comme dans le cas linéaire du paragraphe (4) on écrit pour un milieu périodique :

$$T = \mathcal{T}^\epsilon(\vec{X}, F) = \mathcal{T}\left(\frac{\vec{X}}{\epsilon}, F\right)$$

où $\mathcal{T}(\vec{Y}, F)$ est une fonction définie sur $Y_R \times \mathcal{L}(V)$, Y_R étant une cellule de référence.

On est amené par conséquent à effectuer l'homogénéisation sur le système d'équations :

$$\operatorname{div}^X T^\epsilon + \vec{f} = 0 \text{ dans } \Omega_R \quad (84a)$$

$$T^\epsilon = \mathcal{T} \left(\frac{\vec{X}}{\epsilon}, F^\epsilon \right) \text{ dans } \Omega_R \quad (84b)$$

$$F^\epsilon = \nabla^X \vec{\varphi}^\epsilon$$

Mise à part la loi de comportement (84b) qui est linéaire, ce système d'équations est proche du système (50), Ω est remplacé par Ω_R , σ^ϵ par T^ϵ et \vec{u}^ϵ par $\vec{\varphi}^\epsilon$. L'homogénéisation des équations (84) est très voisine de celle de (50). On cherche le placement $\vec{\varphi}^\epsilon$ sous la forme du développement asymptotique :

$$\vec{\varphi}^\epsilon(\vec{x}) = \vec{\varphi}^{(0)}(\vec{X}) + \epsilon \vec{\varphi}^{(1)}\left(\vec{X}, \frac{\vec{X}}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 \vec{\varphi}^{(2)}\left(\vec{X}, \frac{\vec{X}}{\epsilon}\right) + \dots \quad (85)$$

où les $\vec{\varphi}^{(n)}(\vec{X}, \vec{Y})$ sont Y -périodiques de période Y_R .

Par dérivation de (85), il vient :

$$F^\epsilon = \nabla^X \vec{\varphi}^\epsilon = \nabla^X \vec{\varphi}^{(0)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(1)} + \epsilon (\nabla^X \vec{\varphi}^{(1)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(2)}) + \dots$$

On suppose que la fonction \mathcal{T} se développe en :

$$\begin{aligned} & \mathcal{T} \left(\frac{\vec{X}}{\epsilon}, \nabla^X \vec{\varphi}^{(0)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(1)} + \epsilon (\nabla^X \vec{\varphi}^{(1)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(2)}) + \dots \right) \\ &= \mathcal{T} \left(\frac{\vec{X}}{\epsilon}, \nabla^X \vec{\varphi}^{(0)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(1)} \right) + \epsilon \nabla_F \mathcal{T} @ (\nabla^X \vec{\varphi}^{(1)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(2)}) + \dots \end{aligned}$$

ce qui entraîne que le PK1 se développe en :

$$T^\epsilon = T^{(0)} + \epsilon T^{(1)} + \dots \quad (86)$$

avec :

$$T^{(0)} = \mathcal{T} \left(\frac{\vec{X}}{\epsilon}, \nabla^X \vec{\varphi}^{(0)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(1)} \right) \quad (87)$$

.....

Par dérivation de (86), on obtient :

$$\operatorname{div}^X T^\epsilon(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}^Y T^{(0)} + \operatorname{div}^X T^{(0)} + \operatorname{div}^T T^{(1)} + \dots$$

et le développement de l'équation d'équilibre (84a) par identification des termes de même puissance de ϵ :

$$\operatorname{div}^Y T^{(0)} = 0 \quad (88a)$$

$$\operatorname{div}^Y T^{(0)} + \operatorname{div}^Y T^{(1)} + \vec{\hat{f}} = 0 \quad (88b)$$

$$\dots = 0$$

Comme dans le cas linéaire, l'intégration sur Y_R de l'équation (88b) fournit l'équation d'équilibre macroscopique :

$$\operatorname{div}^Y \langle T^{(0)} \rangle_{Y_R} + \langle \vec{\hat{f}} \rangle_{Y_R} = 0$$

Les équations (88a) et (87) fournissent quant à elles, le problème à résoudre sur la cellule Y_R pour obtenir la loi de comportement homogénéisée qui s'énonce :

Etant donné $F^{(0)} = \nabla^X \vec{\varphi}^{(0)}$, trouver $\vec{\varphi}^{(1)}(\vec{X}, \vec{Y})$ défini Y_R tel que :

$$\operatorname{div}^Y T^{(0)} = 0 \quad (89a)$$

$$T^{(0)} = \mathcal{T} \left(\frac{\vec{X}}{\epsilon}, F^{(0)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(1)} \right) \quad (89b)$$

$$\vec{\varphi}^{(1)} \text{ égal sur les bords opposés de } \partial Y_R \quad (89c)$$

$$T^{(0)} \text{ @ } \vec{N} \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y_R \quad (89d)$$

Ce problème résolu, on obtient la loi de comportement par intégration de (89b) :

$$\langle T^{(0)} \rangle = \frac{1}{|Y_R|} \int_{Y_R} \mathcal{T} \left(\frac{\vec{X}}{\epsilon}, F^{(0)} + \nabla^Y \vec{\varphi}^{(1)} \right) ds^Y \quad (90)$$

Par contre, contrairement au cas linéaire, le problème (89) ne l'est pas linéaire et on peut pas déterminer la loi de comportement par la résolution d'un nombre fini de problème sur Y_R . A chaque fois que la loi homogénéisée est utilisée, il faut résoudre le problème (89) pour la donnée $F^{(0)}$. Par exemple dans un calcul par éléments finis à l'échelle macroscopique utilisant la méthode de Newton, à chaque point de Gauss et à chaque itération de la méthode de Newton, il faut résoudre le problème (89) par éléments finis, d'où le nom de la méthode EF², *éléments finis au carré*.

Références

- [1] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.* 23 (1992) 1482–1518.
- [2] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Amsterdam, North Holland, 1978.
- [3] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, Periodic unfolding and homogenization, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* 335 (2002) 99–104.
- [4] E. De Giorgi, S. Spagnolo, Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine, *Boll. Un. Mat. Ital.* (4) 8 (1973) 391–411.
- [5] R. Hill, The Essential Structure of Constitutive Laws for Metal Composites and Polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 15, 1967, 79-95.
- [6] F. Murat, L. Tartar, H-Convergence, in : A. Cherkaev, R. Kohn (Eds.), *Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials*, Birkhäuser, 1997, pp. 21–44.
- [7] G. Nguetseng, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM J. Math. Anal.* 20 (1989) 608–629.
- [8] E. Sanchez-Palencia, *Non Homogeneous Media and Vibration Theory*, Lectures Notes in Physics n° 127, Berlin, Springer Verlag, 1980.
- [9] E. Sanchez-Palencia, Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes, *Int. J. Engng. Sci.* 12 (1974) 331-351
- [10] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*, Collection Math. Appli. pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1992.
- [11] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, *Exercices sur les méthodes asymptotiques et l'homogénéisation*, Collection Math. Appli. pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1993.
- [12] P. Suquet, *Plasticité et homogénéisation*, Thèse ès sciences mathématiques (mécanique théorique), Université P. et M. Curie, 1982

A Notations

La notation la plus utilisée dans ces notes est vectorielle, ce qui signifie que les vecteurs, d'un espace noté V , de dimension 2 ou 3 suivant les cas, sont notés \vec{u} , \vec{a} , \vec{y} , ... Les points de différents domaine sont repérés par des vecteurs \vec{x} , \vec{y} , ...

Le produit scalaire de deux vecteurs est noté $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Différentes applications linéaires de V dans V interviennent dans ce cours. Comme en mécanique de milieu continu, certaines applications linéaires sont appelées tenseurs (d'ordre 2). On note :

- $\mathcal{L}(V)$ l'ensemble des applications linéaires de V dans V , c'est un espace vectoriel.
- $A\vec{a}$ l'image du vecteur \vec{a} par l'application linéaire A .
- \mathbb{I} l'application linéaire identité vérifiant $\mathbb{I}\vec{x} = \vec{x}$.
- $\text{tr}A$, $\det A$ la trace et le déterminant de l'application A , on peut noter que la définition de ces notions ne dépend pas d'une base.
- A^T l'application transposée de A . A^t est définie par :

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, (A^T \vec{a}) \cdot \vec{b} = (A \vec{b}) \cdot \vec{a}$$

La composition de deux applications linéaires est notée $A \circ B$, c'est la composition de deux applications, elle est donc définie par :

$$\forall \vec{a} \in V, (A \circ B) \vec{a} = A(B\vec{a})$$

On définit les parties symétrique et antisymétrique de A par :

$$A^S = \frac{1}{2} (A + A^T), \quad A^A = \frac{1}{2} (A - A^T)$$

On munit $\mathcal{L}(V)$ d'une structure euclidienne en définissant le produit scalaire $A : B$ par :

$$A : B = \text{tr} (A \circ B^t)$$

Produit tensoriel de deux vecteurs Soient \vec{a} et \vec{b} deux vecteurs de V , on définit une l'application linéaire produit tensoriel de \vec{a} et \vec{b} , noté $\vec{a} \otimes \vec{b}$, par :

$$\forall \vec{x} \in V, (\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{x} = (\vec{b} \cdot \vec{x}) \vec{a}$$

Notation indicielle Les vecteurs et applications linéaires (ou tenseurs d'ordre 2) sont souvent notés avec des indices ainsi le vecteur \vec{a} est noté a_i et l'application linéaire A est notée A_{ij} . On peut voir ces notations comme les composantes de \vec{a} ou de A sur une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (en dimension 3) :

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i\vec{e}_i$$

$$A = \sum_{i=1}^3 A_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

la base est supposée orthonormée.
Ainsi les composantes de $\vec{c} = A\vec{b}$ sont données par :

$$c_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}b_j, \quad i = 1, 2, 3$$

et le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (si la base est orthonormée) par :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

Dans ces notes, la convention de l'indice répété ou convention d'Einstein est utilisée. La convention est la suivante :

Si, dans un même monôme d'une expression mathématique, un indice est répété, on convient de remplacer ce monôme par la somme des trois monômes obtenus en faisant varier l'indice répété de 1 à 3. De plus, dans une égalité valable pour un ou plusieurs indices variant de 1 à 3, on rend implicite la variation de ces indices. Ainsi les expressions $\vec{c} = A\vec{b}$ et $\vec{a} \cdot \vec{b}$ deviennent :

$$c_i = a_{ij}b_j$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$$

Le symbole de Kronecker δ_{ij} défini par $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est la notation indicielle de l'application linéaire identité \mathbb{I}

Différentielles Soit f une application (en général non linéaire) de l'espace normé V dans un espace vectoriel normé W :

$$\vec{x} \in V \rightarrow f(\vec{x}) \in W$$

Dans ces notes, W est \mathbb{R} , V ou $\mathcal{L}(V)$. On désigne par $\|\vec{v}\|_V$ et $\|w\|_W$ les normes dans les espaces V et W . La notion de différentielle sert à donner, quand cela est possible, une approximation à l'ordre 1 en $d\vec{x}$ de la différence :

$$df = f(\vec{x} + d\vec{x}) - f(\vec{x})$$

Définition. L'application f de V dans W est dite différentiable au point \vec{x} de V si et seulement s'il existe une application linéaire de V dans W , notée $\nabla f(\vec{x})$, telle qu'on puisse écrire :

$$\forall d\vec{x} \in V, f(\vec{x} + d\vec{x}) - f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) @ d\vec{x} + \|d\vec{x}\|_V \epsilon(\vec{x}, d(\vec{x}))$$

avec :

$$\|\epsilon(\vec{x}, d(\vec{x}))\|_W \rightarrow 0 \text{ quand } \|d\vec{x}\|_V \rightarrow 0$$

$\nabla f(\vec{x})$ est la différentielle de f au point \vec{x} , pour simplifier, on la note souvent ∇f .

Remarque. Pour des petits écarts $d\vec{x}$ de la variable, la fonction f est approchée par une application affine :

$$f(\vec{x} + d\vec{x}) \approx f(\vec{x}) + \nabla f(\vec{x}) @ d\vec{x}$$

Dans la pratique, l'expression précédente est abrégée en :

$$df = \nabla f(\vec{x}) @ d\vec{x} + \dots$$

ou plus simplement encore (mais incorrectement) :

$$df = \nabla f(\vec{x}) @ d\vec{x}$$

Dans le cas où $W = \mathbb{R}$, ∇f est une application linéaire de V dans \mathbb{R} , il existe donc un vecteur de V , noté $\overrightarrow{\text{grad}}f$ tel que :

$$\nabla f @ d\vec{x} = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot d\vec{x}$$

on a alors :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot d\vec{x} + \dots$$

Dans le cas où $W = V$, l'application f est notée avec une flèche \vec{f} , $\nabla \vec{f}$ est une application linéaire de V dans V , c'est-à-dire un élément de $\mathcal{L}(V)$

$\text{div} \vec{f}$ est défini par :

$$\text{div} \vec{f} = \text{tr} \left(\nabla \vec{f} \right)$$

$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{f}$ est le vecteur associé à l'application antisymétrique $\nabla \vec{f} - \nabla \vec{f}^t$, c'est-à-dire que :

$$\left(\nabla \vec{f} - \nabla \vec{f}^t \right) @ d\vec{x} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{f} \wedge d\vec{x}$$

La divergence $\text{div} T$ d'un champ T de tenseurs d'ordre 2 est définie par :

$$\forall \vec{w}, \text{div} (T^T @ \vec{w}) = (\text{div} T) \cdot \vec{w} + T : \nabla \vec{w} \quad (91)$$

Cette relation est à rapprocher de la relation suivante en quelque sorte analogue pour les champs de vecteurs \vec{w} et de scalaires f :

$$\text{div} (f \vec{w}) = f \text{div} \vec{w} + \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{w} \quad (92)$$

Les deux relations sont à la base des intégrations par parties qui sont utilisées dans l'établissement des formulations faibles et variationnelles de l'annexe ?? en conjonction avec le théorème de la divergence (ou d'Ostrogradsky) qui s'écrit (en dimension 2) :

$$\int_{\Omega} \text{div} \vec{w} ds = \int_{\partial \Omega} \vec{w} \cdot \vec{n} dl \quad (93)$$

où Ω est domaine du plan, $\partial \Omega$ désigne sa frontière et \vec{n} la normale extérieure sur $\partial \Omega$.

Les dérivées partielles par rapport aux variables x_1, x_2 et x_3 sont notées :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \dots \text{ ou } \partial_i f, \partial_i f_j, \dots \text{ ou } \partial_i^x f, \partial_i f_j^x, \dots$$

B Formulations faibles et lemme de Hill

On considère dans cette annexe différentes formulations faibles d'équations de conservations dans une cellule rectangulaire Y comme celle définie au paragraphe 3.

B.1 Formulations faibles et lemme de Hill pour les champs de vecteurs

On considère un champ de vecteurs $\vec{\tau}$ défini dans Y et vérifiant les équations :

$$\operatorname{div}^y \vec{\tau} = 0 \quad (94a)$$

$$\vec{\tau} \cdot \vec{n} \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y \quad (94b)$$

La formulation faible de ces équations s'obtient de façon classique, on multiplie (94a) par un champ η différentiable quelconque et on intègre sur Y :

$$\forall \eta, \int_Y \operatorname{div}^y \vec{\tau} \eta \, ds^y = 0$$

puis on intègre par parties en utilisant la relation (92) et le théorème de la divergence, ce qui donne :

$$\forall \eta, - \int_Y \vec{\tau} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}^y \eta \, ds^y + \int_{\partial Y} \vec{\tau} \cdot \vec{n} \eta \, dl^y = 0$$

la prise en compte de la condition aux limites (94b) fournit la formulation faible des équations (94) qui s'écrit :

$$\forall \eta, - \int_Y \vec{\tau} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}^y \eta \, ds^y + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma^i} \vec{\tau} \cdot \vec{n} [[\eta]]^i \, dl^y = 0 \quad (95)$$

où les fonctions $[[\eta]]^i$ sont définies par (23).

En imposant $[[\eta]]^i = \text{cst}$ sur Γ^i , $i = 1, 2$, (« cst » étant une abréviation pour constante) on obtient :

$$\forall \eta, [[\eta]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, - \int_Y \vec{\tau} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}^y \eta \, ds^y + \sum_{i=1,2} [[\eta]]^i \int_{\Gamma^i} \vec{\tau} \cdot \vec{n} \, dl^y = 0 \quad (96)$$

et, pour $[[\eta]]^i = 0$, c'est-à-dire pour η y -périodique, on a :

$$\forall \eta \text{ périodique}, - \int_Y \vec{\tau} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}^y \eta \, ds^y = 0 \quad (97)$$

On établit maintenant un autre formulation faible faisant intervenir la moyenne $\langle \vec{\tau} \rangle$ de $\vec{\tau}$ sur Y ce qui permet de calculer plus facilement les coefficients homogénéisés dans une méthode d'éléments finis (voir le paragraphe 3.5.1).

Soit $\eta = \vec{a} \cdot \vec{y}$ où \vec{a} est un vecteur constant, on a $\overrightarrow{\text{grad}}^y \eta = \vec{a}$ et $[[\eta]]^i = \vec{a} \cdot \vec{Y}^i$ donc constant. En prenant $\eta = \vec{a} \cdot \vec{y}$ dans (96) cette formulation s'écrit :

$$\forall \vec{a} - \int_Y \vec{\tau} \cdot \vec{a} \, ds^y + \sum_{i=1,2} \left(\vec{a} \cdot \vec{Y}^i \right) \int_{\Gamma^i} (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) \, dl^y = 0$$

ce qui s'écrit aussi, \vec{a} étant constant :

$$\forall \vec{a}, \left(- \int_Y \vec{\tau} \, ds^y + \sum_{i=1,2} \vec{Y}^i \int_{\Gamma^i} \vec{\tau} \cdot \vec{n} \, dl^y \right) \cdot \vec{a} = 0$$

ce qui entraîne, \vec{a} étant quelconque :

$$\int_Y \vec{\tau} \, ds^y = \sum_{i=1,2} \vec{Y}^i \int_{\Gamma^i} \vec{\tau} \cdot \vec{n} \, dl^y \quad (98)$$

On a donc le résultat donnant la moyenne $\langle \vec{\tau} \rangle$:

$$\langle \vec{\tau} \rangle = \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1,2} \vec{Y}^i \int_{\Gamma^i} \vec{\tau} \cdot \vec{n} \, dl^y \quad (99)$$

Ce résultat n'est pas suffisant pour faire apparaître $\langle \vec{\tau} \rangle$ dans la formulation (96), pour cela on a besoin des résultats suivants.

Lemme 16. *On a :*

$$\sum_{i=1,2} \vec{Y}^i \otimes \vec{N}^i = \sum_{i=1,2} \vec{N}^i \otimes \vec{Y}^i = |Y| \mathbb{I} \quad (100)$$

où on a posé :

$$\vec{N}^i = \int_{\Gamma^i} \vec{n} \, dl^y, \quad i = 1, 2 \quad (101)$$

Démonstration. En prenant dans (98) $\vec{\tau}$ constant, qui vérifie bien les équations (94), il vient :

$$|Y| \vec{\tau} = \sum_{i=1,2} \vec{Y}^i \left(\int_{\Gamma^i} \vec{n} \, dl^y \right) \cdot \vec{\tau}$$

soit, $\vec{\tau}$ étant quelconque et en tenant compte de (101) :

$$|Y| \mathbb{I} = \sum_{i=1,2} \vec{Y}^i \otimes \vec{N}^i$$

La deuxième partie de l'égalité (100) s'obtient en transposant l'égalité précédente. \square

Corollaire 17. On a :

$$\vec{N}^i \cdot \vec{Y}^j = |Y| \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (102)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Démonstration. En transformant le vecteur \vec{Y}^j par les deux membres de l'égalité (100), il vient :

$$\sum_{i=1,2} \vec{Y}^i \otimes \vec{N}^i \otimes \vec{Y}^j = |Y| \vec{Y}^j$$

soit :

$$\sum_{i=1,2} \vec{Y}^i \left(\vec{N}^i \cdot \vec{Y}^j \right) = |Y| \vec{Y}^j$$

les vecteurs \vec{Y}^1 et \vec{Y}^2 étant linéairement indépendants, on en déduit :

$$\vec{N}^i \cdot \vec{Y}^j = |Y| \delta_{ij}$$

□

Revenons maintenant à (96) qu'on écrit :

$$\forall \eta, [[\eta]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \quad \int_Y \vec{\tau} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \, ds^y = \sum_{i,j=1,2} [[\eta]]^i \delta_{ij} \int_{\Gamma^j} \vec{\tau} \cdot \vec{n} \, dl^y$$

ou encore en utilisant la relation (102) :

$$\forall \eta, [[\eta]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \quad \int_Y \vec{\tau} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \, ds^y = \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1,2} \left([[\eta]]^i \vec{N}^i \right) \cdot \sum_{j=1,2} \left(\vec{Y}^j \int_{\Gamma^j} \vec{\tau} \cdot \vec{n} \, dl^y \right)$$

soit en utilisant la relation de moyenne (99) :

$$\forall \eta, [[\eta]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \quad \int_Y \vec{\tau} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \, ds^y = \sum_{i=1,2} \left([[\eta]]^i \vec{N}^i \right) \cdot \langle \vec{\tau} \rangle \quad (103)$$

En prenant $\vec{\tau}$ constant dans la formulation précédente, il vient :

$$\forall \eta, [[\eta]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \quad \forall \vec{\tau}, \quad \vec{\tau} \cdot \int_Y \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \, ds^y = \sum_{i=1,2} [[\eta]]^i \vec{N}^i \cdot \vec{\tau}$$

ce qui entraîne, $\vec{\tau}$ étant quelconque :

$$\forall \eta, [[\eta]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \quad \int_Y \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \, ds^y = \sum_{i=1,2} [[\eta]]^i \vec{N}^i$$

On a donc le résultat donnant la moyenne $\langle \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \rangle$:

$$\forall \eta, [[\eta]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \langle \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \rangle = \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1,2} [[\eta]]^i \vec{N}^i \quad (104)$$

En reportant ce résultat dans (103) on démontre le lemme de Hill¹ :

Lemme 18. de Hill *Soient $\vec{\tau}$ et η des champs définis et différentiables sur Y tels que :*

$$\begin{aligned} \text{div}^y \vec{\tau} &= 0 \\ \vec{\tau} \cdot \vec{n} &\text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y \\ [[\eta]]^i &\text{ constant sur } \Gamma^i, i = 1, 2 \end{aligned}$$

alors

$$\langle \vec{\tau} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \rangle = \langle \overrightarrow{\text{grad}}^y \eta \rangle \cdot \langle \vec{\tau} \rangle \quad (105)$$

B.2 Formulations faibles et lemme de Hill pour les champs de tenseurs

On considère un champ de tenseurs σ défini dans Y et vérifiant les équations :

$$\text{div}^y \sigma = 0 \quad (106a)$$

$$\sigma \otimes \vec{n} \text{ opposés sur les bords opposés de } \partial Y \quad (106b)$$

La formulation faible de ces équations s'obtient de façon classique, on multiplie (106a) par un champ \vec{w} différentiable quelconque et on intègre sur Y :

$$\forall \vec{w}, \int_Y (\text{div}^y \sigma) \cdot \vec{w} \, ds^y = 0$$

puis on intègre par parties en utilisant la relation (91) et le théorème de la divergence, ce qui donne :

$$\forall \vec{w}, - \int_Y \sigma : \nabla^y \vec{w} \, ds^y + \int_{\partial Y} (\sigma \otimes \vec{n}) \cdot \vec{w} \, dl^y = 0$$

1. Le lemme dit « de Hill » est en fait énoncé sans démonstration par Hill dans la référence [5] pour un champ de tenseurs

la prise en compte de la condition aux limites (106b) fournit la formulation faible des équations (106) qui s'écrit :

$$\forall \vec{w}, - \int_Y \sigma : \nabla^y \vec{w} \, ds^y + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma^i} (\sigma \otimes \vec{n}) \cdot [[\vec{w}]]^i \, dl^y = 0 \quad (107)$$

où les fonctions $[[\vec{w}]]^i$ sont définies par (23).

En imposant $[[\vec{w}]]^i = \text{cst}$ sur Γ^i , $i = 1, 2$, on obtient :

$$\forall \vec{w}, [[\vec{w}]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, - \int_Y \sigma : \nabla^y \vec{w} \, ds^y + \sum_{i=1,2} [[\vec{w}]]^i \cdot \int_{\Gamma^i} (\sigma \otimes \vec{n}) \, dl^y = 0 \quad (108)$$

et, pour $[[\vec{w}]]^i = 0$, c'est-à-dire pour \vec{w} y -périodique, il vient :

$$\forall \vec{w}, y\text{-périodique}, \int_Y \sigma : \nabla^y \vec{w} \, ds^y = 0 \quad (109)$$

On établit maintenant une autre formulation faible faisant intervenir la moyenne $\langle \sigma \rangle$ de σ sur Y ce qui permet de calculer plus facilement les coefficients homogénéisés dans une méthode d'éléments finis (voir le paragraphe 3.5.1).

Soit $\vec{w} = A \otimes \vec{y}$ où A est un tenseur d'ordre 2 constant, on a $\nabla^y \vec{w} = A$ et $[[\vec{w}]]^i = A \otimes \vec{Y}^i$ donc constant. En prenant $\vec{w} = A \otimes \vec{y}$ dans (108) cette formulation s'écrit :

$$\forall A, - \int_Y \sigma : A \, ds^y + \sum_{i=1,2} (A \otimes \vec{Y}^i) \cdot \int_{\Gamma^i} (\sigma \otimes \vec{n}) \, dl^y = 0$$

ce qui s'écrit aussi, A étant constant :

$$\forall A, \left(- \int_Y \sigma \, ds^y + \sum_{i=1,2} \left(\int_{\Gamma^i} (\sigma \otimes \vec{n}) \, dl^y \right) \otimes \vec{Y}^i \right) : A = 0$$

ce qui entraîne, A étant quelconque :

$$\int_Y \sigma \, ds^y = \sum_{i=1,2} \left(\int_{\Gamma^i} (\sigma \otimes \vec{n}) \, dl^y \right) \otimes \vec{Y}^i \quad (110)$$

On a donc le résultat donnant la moyenne $\langle \sigma \rangle$:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1,2} \left(\int_{\Gamma^i} (\sigma \otimes \vec{n}) \, dl^y \right) \otimes \vec{Y}^i \quad (111)$$

On réécrit maintenant (108) sous la forme :

$$\forall \vec{w}, [[\vec{w}]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \int_Y \sigma : \nabla^y \vec{w} \, ds^y = \sum_{i,j=1,2} \delta_{ij} [[\vec{w}]]^i \cdot \int_{\Gamma^j} (\sigma \otimes \vec{n}) \, dl^y$$

ou encore en utilisant la relation (102) :

$$\forall \vec{w}, [[\vec{w}]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \int_Y \sigma : \nabla^y \vec{w} \, ds^y = \frac{1}{|Y|} \sum_{i,j=1,2} \vec{N}^i \cdot \vec{Y}^j [[\vec{w}]]^i \cdot \int_{\Gamma^j} (\sigma \otimes \vec{n}) \, dl^y$$

soit aussi :

$$\forall \vec{w}, [[\vec{w}]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \int_Y \sigma : \nabla^y \vec{w} \, ds^y = \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1,2} \left([[\vec{w}]]^i \otimes \vec{N}^i \right) : \sum_{j=1,2} \left(\int_{\Gamma^j} (\sigma \otimes \vec{n}) \, dl^y \otimes \vec{Y}^j \right)$$

soit en utilisant la relation de moyenne (111) :

$$\forall \vec{w}, [[\vec{w}]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \int_Y \sigma : \nabla^y \vec{w} \, ds^y = \sum_{i=1,2} \left([[\vec{w}]]^i \otimes \vec{N}^i \right) : \langle \sigma \rangle \quad (112)$$

En prenant σ constant dans la formulation précédente, il vient :

$$\forall \vec{w}, [[\vec{w}]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \left(\int_Y \nabla^y \vec{w} \, ds^y = \sum_{i=1,2} \left([[\vec{w}]]^i \otimes \vec{N}^i \right) \right) : \sigma$$

ce qui entraîne, σ étant quelconque :

$$\forall \vec{w}, [[\vec{w}]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \int_Y \nabla^y \vec{w} \, ds^y = \sum_{i=1,2} \left([[\vec{w}]]^i \otimes \vec{N}^i \right)$$

On a donc le résultat donnant la moyenne $\langle \nabla^y \vec{w} \rangle$:

$$\forall \eta, [[\eta]]^i = \text{cst sur } \Gamma^i, \langle \nabla^y \vec{w} \rangle = \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1,2} \left([[\vec{w}]]^i \otimes \vec{N}^i \right) \quad (113)$$

En reportant ce résultat dans (112) on démontre le lemme de Hill pour les tenseurs d'ordre 2 :

Lemme 19. de Hill Soient σ et \vec{w} des champs définis et différentiables sur Y tels que :

$$\text{div}^y \sigma = 0$$

$\sigma \otimes \vec{n}$ opposés sur les bords opposés de ∂Y

$$[[\vec{w}]]^i \text{ constant sur } \Gamma^i, i = 1, 2$$

alors

$$\langle \sigma : \nabla^y \vec{w} \rangle = \langle \sigma \rangle : \langle \nabla^y \vec{w} \rangle \quad (114)$$