Analyse Asymptotique et perturbations singulières.
Introduction et fondements méthodologiques.

Jacques Mauss. Quiberon 2012.

Pourquoi l'analyse asymptotique ?
Cette question ne se posait pas dans les années 1960 et puis, petit à petit, avec l'avènement des ordinateurs et de leur puissance de calcul, cette discipline, pourtant miraculeuse par beaucoup d'aspects, eut tendance à disparaître des publications scientifiques. Elle revient en vogue parce que l'analyse fine des phénomènes est trop importante pour que l'on se contente, même dans les applications industrielles, de résultats numériques trop souvent difficiles à interpréter. Le mariage entre l'analyse numérique et l'analyse asymptotique fut certes difficile à ses débuts mais, avec le temps, c'est devenu un mariage heureux.
En fait, même si on ne s'en rend pas toujours compte, l'analyse asymptotique est toujours présente dès que les phénomènes physiques sont modélisés sous la forme de problèmes mathématiques.

Cette première partie concerne l'initiation à des méthodes essentielles dans l'étude de problèmes où un ou plusieurs petits paramètres permettent d'espérer de trouver des approximations à la solution.

Les problèmes mathématiques modélisant un ou des phénomènes physiques sont, le plus souvent difficiles sinon impossibles à résoudre. Mais il peut apparaître des simplifications quand on se limite dans les domaines de calcul ou dans l'adimensionnalisation quand un ou plusieurs petits paramètres sont présents, signifiant que des phénomènes peuvent être négligeables par rapport à d'autres. Dans cet esprit nous envisagerons sur quelques exemples simples les méthodes importantes dans l'étude des problèmes singuliers. On abordera en particulier le modèle de l'oscillateur linéaire et on donnera une idée de quatre méthodes, la Méthode des Développements Asymptotiques Raccordés (MDAR), la Méthode des Approximations Successives Complémentaire (MASC), la méthode des échelles multiples et la méthode de Poincaré-Lighthill ou, selon la terminologie américaine, la méthode des coordonnées forcées.
On donnera ensuite le bagage mathématique minimum pour aborder la notion de développement asymptotique qui permettra de définir les quelques outils mathématiques essentiels à l'écriture du formalisme de base. Ainsi les questions des fonctions d'ordre et de jauge, celles de la définition d'une approximation asymptotique et celles, très importantes, liées aux définitions de ce qu'est véritablement un développement asymptotique seront abordées.
Dans la dernière partie, consacrée aux fonctions singulières, on va s'intéresser d'abord à la méthode la plus utilisée, la Méthode des Développements Asymptotiques Raccordés (MDAR). La MDAR contient en fait deux techniques différentes, l'une qui paraît naturelle, la technique du raccord intermédiaire dont la mise en œuvre est particulièrement délicate, l'autre plus mystérieuse, le Principe de Van Dyke (PVD), beaucoup plus facile à utiliser.
Les défauts de ces deux approches seront mis en évidence à l'aide de contre-exemples.
Une nouvelle méthode, très puissante et prometteuse, sera suggérée, la Méthode des Approximations Successives Complémentaires (MASC). On pourrait d'ailleurs en modifier le nom car, le plus souvent, on n'ira pas beaucoup plus loin que le second terme ; ainsi la MAUV serait un acronyme de bon aloi (Méthode des Approximations Uniformément Valables).